

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

П. П. ЛІЗУНОВ, В. О. НЕДІН

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій
для студентів спеціальності
192 «Будівництво та цивільна інженерія»
освітньої програми «Технологія будівельних
конструкцій, виробів і матеріалів»

Київ 2022

УДК 624.04

Л55

Рецензент: Г. М. Іванченко, доктор технічних наук, професор

*Затверджено на засіданні навчально-методичної ради КНУБА,
протокол № 8 від 21 червня 2022 року.*

В авторській редакції.

Лізунов П. П.

Л55 Будівельна механіка: конспект лекцій / П. П. Лізунов,
В. О. Недін. – Київ.: КНУБА, 2022. – 172 с.

Розглянуто основні положення, визначення і методи будівельної механіки, що застосовуються для розрахунку плоских стержневих систем. Містить теоретичну інформацію про основи статичного розрахунку плоских стержневих систем, способи і методи будівельної механіки.

Призначено для студентів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» освітньої програми «Технологія будівельних конструкцій, виробів і матеріалів».

УДК 624.04

© П.П. Лізунов, В.О. Недін, 2022

© КНУБА, 2022

ЗМІСТ

Вступ.....	6
Лекція 1. Будівельна механіка.....	7
1.1. Задачі будівельної механіки.....	8
1.2. Основні припущення будівельної механіки.....	9
1.3. Навантаження.....	11
1.4. Розрахункові схеми споруд.....	12
Лекція 2. Кінематичний аналіз плоских стержневих систем.....	16
2.1. Основні поняття кінематичного аналізу.....	16
2.2. Конструктивні елементи розрахункових схем.....	17
2.3. Визначення ступеня геометричної змінюваності.....	22
Лекція 3. Способи утворення геометрично незмінюваних систем.....	26
3.1. Приєднання шарнірного вузла до диска.....	26
3.2. З'єднання двох дисків.....	27
3.3. З'єднання трьох дисків.....	28
Лекція 4. Розрахунок статично визначуваних систем. Основи стати- чного розрахунку плоских стержневих систем.....	31
4.1. Визначення реакцій в'язей.....	32
4.2. Визначення зусиль в елементах споруди.....	38
Лекція 5. Розрахунок плоских ферм.....	41
5.1. Конструктивні особливості та класифікація ферм.....	41
5.2. Особливості кінематичного аналізу ферм.....	43
5.3. Загальний спосіб розрахунку ферм.....	44
5.4. Способи визначення зусиль у стержнях ферми.....	45
Лекція 6. Розрахунок шарнірно-консольних балок.....	57
6.1. Основні теоретичні відомості.....	57
6.2. Визначення реакцій в опорних і з'єднувальних при- строях.....	58
6.3. Визначення внутрішніх зусиль, побудова епюр.....	59
Лекція 7. Розрахунок тришарнірних арок.....	62
7.1. Розрахунок арки у разі довільного навантаження.....	63

7.2. Розрахунок арки під час дії вертикального навантаження.....	66
7.3. Розрахунок арки з горизонтальною затяжкою.....	69
Лекція 8. Розрахунок плоских рам.....	72
8.1. Класифікація статично визначуваних рам.....	72
8.2. Визначення опорних реакцій.....	74
8.3. Обчислення внутрішніх зусиль у плоских рамах.....	77
Лекція 9. Визначення переміщень в статично визначуваних системах.....	82
9.1. Робота зовнішніх і внутрішніх сил.....	82
9.2. Узагальнені сили та узагальнені переміщення.....	85
9.3. Матриця податливості і матриця жорсткості.....	87
9.4. Інтеграл Мора.....	91
9.5. Окремі випадки застосування формули Максвелла-Мора.....	94
9.6. Обчислення інтеграла Мора.....	94
Лекція 10. Розрахунок статично невизначуваних систем методом сил.....	99
10.1. Ступінь статичної невизначуваності.....	99
10.2. Основна система і основні невідомі методу сил.....	101
10.3. Система розв'язувальних рівнянь методу сил.....	102
10.4. Обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь.....	108
Лекція 11. Розрахунок статично невизначуваних систем методом сил.....	110
11.1. Визначення дійсних зусиль.....	110
11.2. Обчислення переміщень у статично невизначуваних системах.....	112
11.3. Кінематична перевірка розрахунку.....	113
Лекція 12. Розрахунок нерозрізної балки	115
12.1. Рівняння трьох моментів.....	115
12.2. Розрахунок нерозрізної балки за методом моментних фокусів.....	122

Лекція 13. Розрахунок статично невизначуваних систем методом переміщень.....	128
13.1. Припущення методу переміщень.....	128
13.2. Основна система методу переміщень.....	129
13.3. Основні невідомі методу переміщень.....	131
13.4. Канонічні рівняння методу переміщень.....	132
13.5. Епюри зусиль в основній системі методу переміщень.....	136
13.6. Обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь.....	141
13.7. Визначення дійсних зусиль.....	147
Лекція 14. Розрахунок стержневих систем методом скінченних елементів.....	149
14.1. Основна ідея методу скінченних елементів.....	150
14.2. Перехід до дискретної моделі.....	151
14.3. Типи скінченних елементів.....	152
14.4. Вузлові характеристики дискретної моделі.....	153
14.5. Кінцеві характеристики стержневих скінченних елементів.....	157
Лекція 15. Розрахунок стержневих систем методом скінченних елементів.....	160
15.1. Матриця перетворення.....	160
15.2. Матриця жорсткості скінченного елемента у локальній системі координат.....	162
15.3. Матриця жорсткості скінченного елемента у глобальній системі координат.....	163
15.4. Матриця жорсткості дискретної моделі.....	166
15.5. Визначення дійсних зусиль.....	168
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	172

Вступ

Дисципліна «Будівельна механіка» на ряду з дисциплінами «Опір матеріалів», «Теорія пружності», «Теорія пластичності», «Теорія повзучості» є розділом механіки твердого деформівного тіла.

У процесі вивчення курсу студент має ознайомитись із задачами будівельної механіки, гіпотезами та принципами, основними визначеннями та термінами. Засвоїти основи кінематичного аналізу плоских стержневих систем, побудову розрахункових схем споруд.

Під час вивчення матеріалу студент має опонувати основи статичного розрахунку плоских стержневих систем, визначення реакцій в'язей та зусиль в елементах конструкцій, таких як: статично визначувані ферми, шарнірно-консольні балки, тришарнірні арки, плоскі рами. Також студентам необхідно засвоїти визначення переміщень з використанням прийомів обчислення інтеграла Мора.

Для розрахунку статично невизначуваних плоских рам студенти мають вивчити метод сил, метод переміщень, метод скінченних елементів.

У кінці кожної лекції є контрольні запитання, які допомагати-муть студентам провести самоконтроль засвоєння матеріалу.

В результаті вивчення викладеного у конспекті лекцій матеріалу студент отримає теоретичні і практичні знання по розрахунку плоских стержневих систем із застосуванням розглянутих методів, способів і принципів будівельної механіки.

Лекція 1

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

Будівельна механіка – це наука, що розробляє методи розрахунку інженерних конструкцій і споруд на міцність, жорсткість і стійкість. Усі інженерні конструкції і споруди: будівлі; мости; башти; резервуари; корпуси машин, літаків, суден, ракет тощо мають задовольняти умовам міцності, жорсткості і стійкості.

Умови міцності полягають в тому, що внутрішні зусилля і напруження в елементах конструкцій не мають перевищувати величин, за яких ці елементи можуть зруйнуватися.

У процесі експлуатації на конструкції будівель і споруд діють зовнішні навантаження і впливи, внаслідок чого їх елементи деформуються і набувають переміщень у просторі. Такі деформації можуть зробити конструкцію непридатною до експлуатації, а напруження, що виникають у перерізах елементів, можуть перевищувати критичні значення, що у свою чергу призведе до їх руйнування. Перевірка умов жорсткості – це порівняння деформацій споруди з тими, що припускаються.

Окрім основних навантажень, що діють на конструкцію, також можуть діяти навантаження випадкового та тимчасового характеру, при знятті яких конструкція має поновлювати свій вихідний стан. Це є умовою стійкості споруди.

1.1. Задачі будівельної механіки

Перед будівельною механікою стоять такі задачі:

1. Дослідження утворення раціональних форм споруд.
2. Обчислення внутрішніх зусиль в усіх елементах конструкції або споруди, тобто визначення напружено-деформованого стану об'єкта, що вивчається.
3. Аналіз переміщень, які виникають у споруді під зовнішніми діями.
4. Дослідження стійкості споруди.

Напруження, деформації і переміщення, які виникають у тілах від зовнішніх навантажень, вивчаються в механіці твердого деформівного тіла. Розділами механіки твердого деформівного тіла є опір

матеріалів, теорія пружності, теорія пластичності, теорія повзучості і будівельна механіка.

Будівельна механіка вивчає складні механічні системи, до складу яких входять елементи різних типів: масивні тіла (рис. 1.1, а), пластини (рис. 1.1, б), оболонки (рис. 1.1, в), стержні (рис. 1.1, з, д).

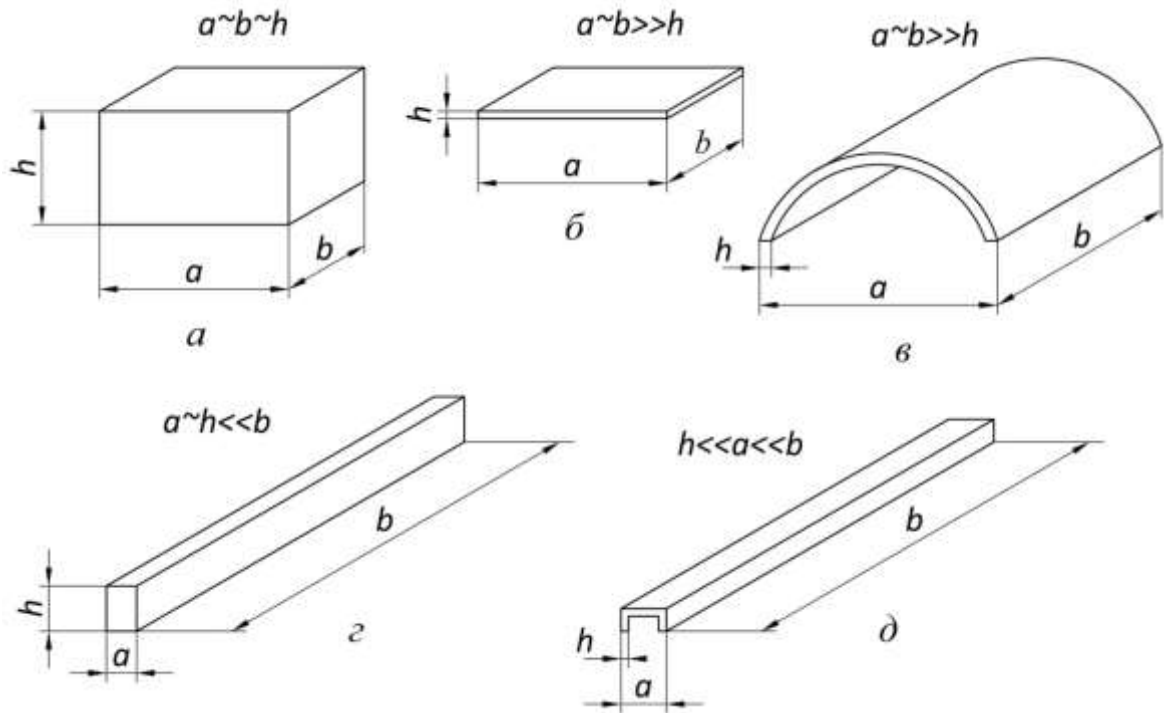


Рис. 1.1

До масивних тіл відносяться просторові елементи, розміри яких в усіх трьох вимірах є величинами одного порядку (рис. 1.1, а). До пластин відносяться просторові елементи, в яких один із розмірів (товщина h) набагато менше двох інших (a і b), а серединна поверхня є площиною (рис. 1.1, б). До оболонок відносяться просторові елементи в яких один із розмірів (товщина h) набагато менше двох інших (a і b), а серединна поверхня викривлена (рис. 1.1, в). До стержнів відносяться просторові елементи, в яких два розміри – ширина a і висота h набагато менші за його довжину b (рис. 1.1, з, д), причому, у тонкостінному стержні ці три розміри мають різний порядок (рис. 1.1, д).

Основними задачами базового курсу будівельної механіки є задачі розрахунків *стержневих систем*.

Стержнева система – це система, що складається з окремих стержнів, з'єднаних між собою у вузлах. До стержневих систем можуть бути віднесені балки (рис. 1.2, а), арки (рис. 1.2, б), рами (рис. 1.2, в), ферми (рис. 1.2, з), комбіновані системи (рис. 1.2, д).

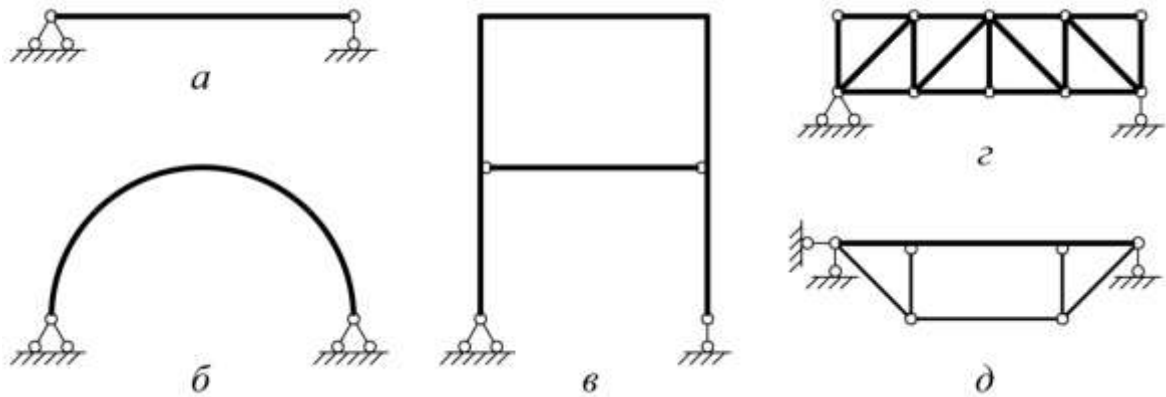


Рис. 1.2

1.2. Основні припущення будівельної механіки

Розрахунки в будівельній механіці будуються на деяких припущеннях. Вони зазвичай збігаються з припущеннями, які мають місце в опорі матеріалів і в теорії пружності, але мають бути віднесені до всієї споруди в цілому.

Гіпотеза суцільності – тіло вважається суцільним, таким, що неперервно заповнює свій об'єм. На цій підставі деформації і переміщення точок елемента можуть вважатися неперервними функціями координат.

Гіпотеза однорідності та ізотропності: властивості матеріалу однакові в усіх точках і по усіх напрямках.

Гіпотеза ідеальної пружності: матеріал конструкцій вважається ідеально пружним. Це означає, що після зняття навантаження деформація усувається, споруда сповна поновлює форму, яку мала до початку навантаження, і повертає енергію, яку було витрачено на її деформацію.

Гіпотеза лінійної залежності між деформаціями і напруженнями: вважається, що між напруженнями і деформаціями в усіх точках зберігається лінійна залежність (закон Гука). Завдяки цій гіпотезі,

разом з попередніми, пружні властивості матеріалу в усіх точках тіла характеризуються трьома параметрами: модулем пружності E , модулем зсуву G і коефіцієнтом Пуассона ν , які пов'язані між собою залежністю $G = E/2(1 + \nu)$.

Гіпотеза малих переміщень: переміщення точок системи, які зумовлені пружними деформаціями, є малими, тобто такими, що допускають лінійну залежність між деформаціями і переміщеннями в рівняннях геометричного аспекту задачі, а також складання рівнянь рівноваги для недеформованого стану.

Гіпотеза природного ненапруженого стану: початкові напруження в тілі вважаються такими, що дорівнюють нулю. Це означає, що напруження і зусилля, які визначаються в результаті розрахунку, становлять лише їх приріст над тими, що були спочатку.

З наведених гіпотез впливає *принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції)*: в лінійно деформівних системах сумарний ефект від дії кількох сил дорівнює сумі ефектів від дії кожної сили окремо.

Під час розв'язання задач будівельної механіки велике значення має застосування *принципу Сен-Венана*: якщо до будь-якої малої частини споруди прикладено зрівноважену систему сил, то вона викликає напруження, які швидко зменшуються в міру віддалення від цієї частини. Тобто, в точках, які є віддаленими від місця прикладання зовнішнього навантаження, напруження мало залежать від детального способу реалізації цього навантаження. Принцип Сен-Венана дає змогу переносити сили по лінії їх дії, замінювати зосереджені сили розподіленим навантаженням і вважати за такої умови, що напруження і деформації у перерізах, достатньо віддалених від місця навантаження, практично не змінюються. За таким формулюванням принцип Сен-Венана називають принципом пружної рівнозначності статично еквівалентних систем сил.

Будівельна механіка стержневих систем досліджує системи, елементами яких є стержні, водночас використовуються додатково основні гіпотези опору матеріалів, наприклад, гіпотези елементарної теорії згину балок тощо.

1.3. Навантаження

Методи розрахунку конструкцій залежать від характеру зовнішнього навантаження, способу його прикладання, а також від умов роботи споруди. Поняття навантаження, окрім зовнішніх сил, поширюється на такі дії, як вплив температурних або електромагнітних випромінювань, примусове зміщення опор або окремих вузлів конструкцій, попереднє напруження тощо. Залежно від поведінки у часі навантаження можуть бути поділені на *статичні* і *динамічні*. До *статичних* можуть бути віднесені такі навантаження, які змінюються у часі з незначною швидкістю, коли прискореннями мас системи, що зумовлені її деформаціями, можна знехтувати. Навантаження, яке зумовлює значні прискорення мас споруди, внаслідок чого її елементи починають коливатися, називається *динамічним*.

Залежно від способу прикладання розрізняють навантаження *зосереджені* і *розподілені*. Реальні навантаження завжди є *розподіленими*. До *зосереджених* відносять такі навантаження, які передаються на споруду на невеликій по відношенню до її розмірів площі, яку можна умовно прийняти за точку.

Зовнішні дії поділяються на *постійні* і *тимчасові*. *Постійне навантаження* діє впродовж всього терміну існування споруди без зміни місця прикладання, величини і напрямку. Як правило, до *постійного навантаження* відносять власну вагу споруди. *Тимчасові навантаження* поділяються на *довготривалі* та *короткотривалі*. До *тимчасового довготривалого навантаження* можна віднести вагу деяких елементів споруди, які протягом часу можуть не змінювати свої характеристики: розташування, величину тощо. Прикладом такого навантаження може бути вага стаціонарного обладнання. До *тимчасового короткотривалого навантаження* відносять снігове і вітрове навантаження, вагу людей, температурні дії тощо.

Навантаження також можуть поділятися за способом дії. Так, *однопараметричним* вважають таке навантаження, всі складові якого змінюються в часі пропорційно одному параметру. Якщо система зовнішніх сил може бути розбита на окремі групи, кожна з яких не залежить від інших, таке навантаження називають *багато-*

параметричним. Навантаження, яке змінює своє розташування на споруді, називають рухомим.

1.4. Розрахункові схеми споруд

Під час розрахунку споруд на міцність, жорсткість і стійкість зазвичай розглядають не реальну споруду, а її спрощену *розрахункову схему*. Це пов'язано з тим, що більшість споруд має складну структуру елементів, які її складають. Тому для розрахунку доводиться спрощувати систему, яка розраховується, свідомо відмовляючись від багатьох менш суттєвих факторів. Отже *розрахункова схема* – це спрощене зображення споруди, яке одержується за рахунок ігнорування другорядних факторів. Перехід від реальної споруди до її *розрахункової схеми* – дуже відповідальний етап. По-перше, спрощення, які внесені у процесі переходу до розрахункової схеми, мають зробити прийнятною трудомісткість розрахунку, по-друге, вони мають забезпечити достовірність отриманих результатів.

Загальних рекомендацій щодо переходу від реальної споруди до розрахункової схеми немає, але існують деякі типові прийоми. Наприклад, розглянемо залізобетонну балку довжиною L , яка спирається на залізобетонні опорні подушки, що розташовані в цегляних стінах та заглиблені в них на глибину b (рис. 1.3, *а*). Відстань між стінами «у світлі» позначено l_0 . На балці розташоване обладнання вагою Q_1 та Q_2 .

Замінімо цю конструкцію розрахунковою схемою. В ній опорні подушки, на які спирається балка замінюються ідеалізованими опорами, одна з яких шарнірно-нерухома, а друга – шарнірно-рухома (рис. 1.3, *б*). Розташовуються ці уявні опори в центрах площадок спираючої балки. Реальна балка в такій розрахунковій схемі позначається відрізком прямої довжиною $l=l_0+b$ (рис. 1.3).

Вагу реального обладнання Q_1 та Q_2 умовно замінімо або рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q , або зосередженою силою P (рис. 1.3, *б*), причому, якщо довжина спираючої балки a_1 є величиною, більшою ніж величина його висоти h_1 (тобто $a_1 > h_1$), доцільно вагу обладнання Q_1 замінювати розподіленим навантаженням інтенсивністю $q=Q_1/a_1$, а якщо довжина спи-

рання обладнання a_2 є величиною, меншою ніж величина його висоти h_2 (тобто $a_2 < h_2$), доцільно вагу обладнання Q_2 замінювати зосередженою силою $P=Q_2$.

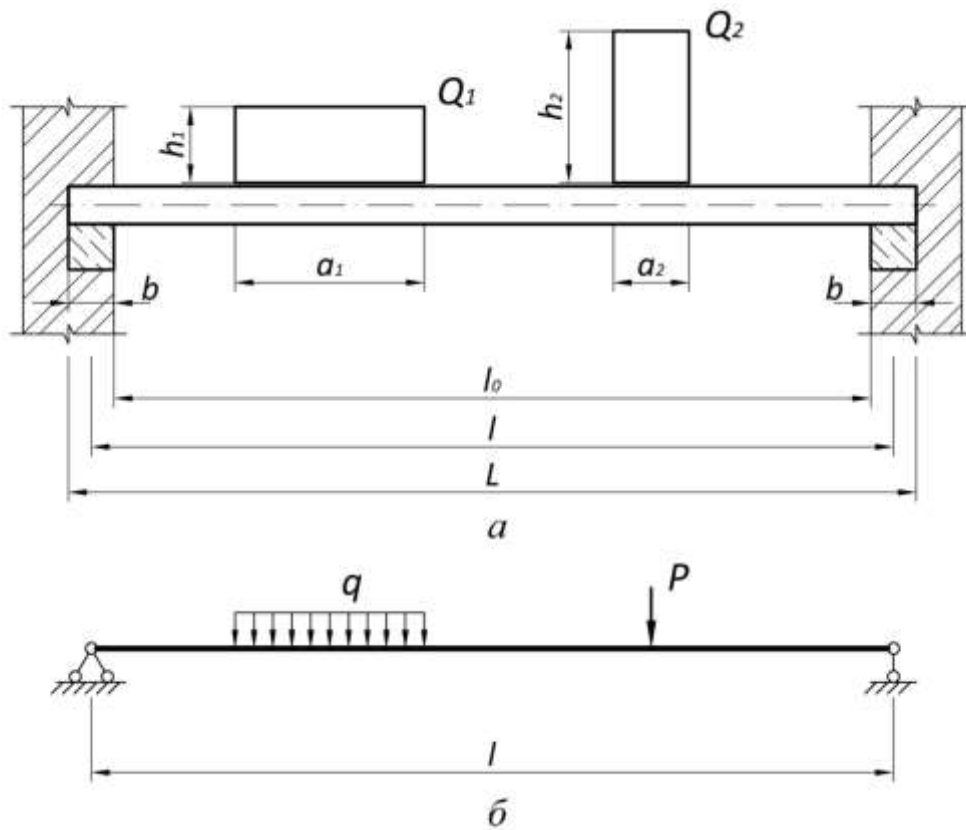


Рис. 1.3

У наведеній розрахунковій схемі власну вагу балки можемо врахувати як рівномірно розподілене навантаження або можемо знехтувати нею, якщо власна вага набагато менша за вагу обладнання, що на ній розташоване.

Таким чином реальну балку (рис. 1.3, а) зведено до розрахункової схеми (рис. 1.3, б). Для цієї схеми можна обчислити опорні реакції, побудувати епюри внутрішніх зусиль і прогинів. Після визначення зусиль необхідно повернутися від розрахункової схеми до первісної конструкції, обчислити нормальні і дотичні напруження, що виникають в перерізах балки, та співставити їх з напруженнями, які може витримати матеріал, з якого вона виготовлена.

Конструкції, які утворюють будівлю чи споруду (рис. 1.4, а), є складними механічними системами, для розрахунку яких складаються відповідні розрахункові схеми (рис. 1.4, б).

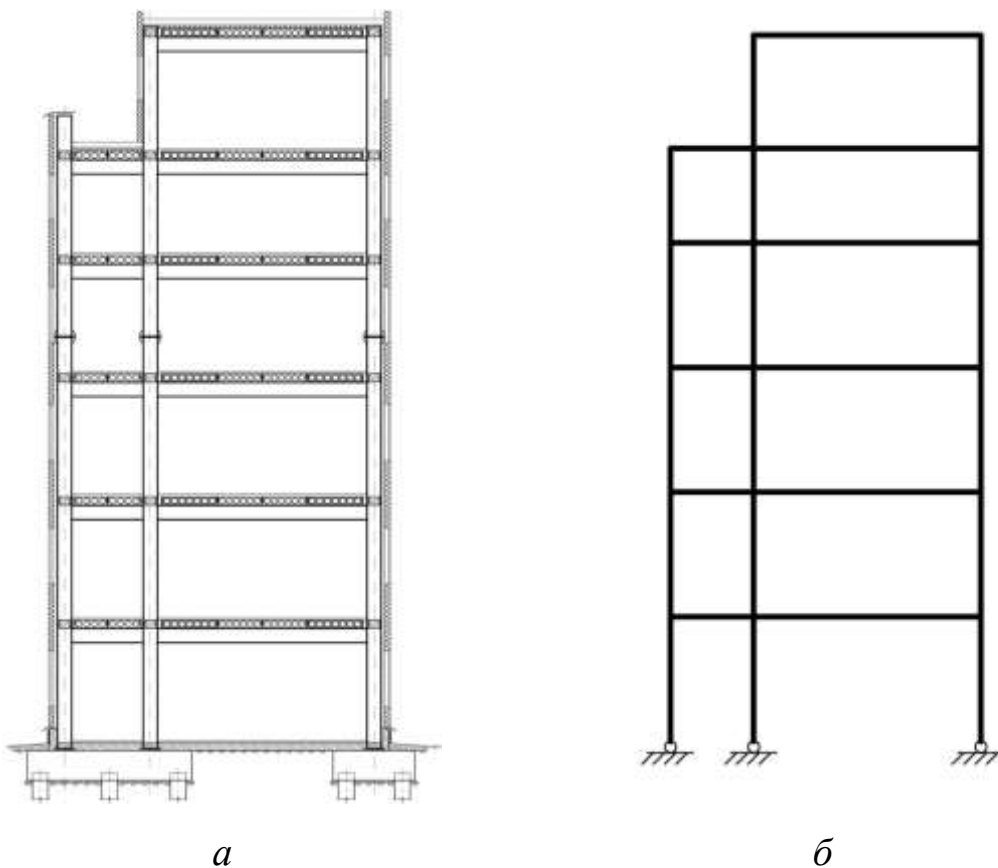


Рис. 1.4

Задача розрахунку споруди, сформульована за допомогою відповідних математичних рівнянь, залежностей або умов, є *математичною моделлю* розрахунку споруди.

Розрізняють *дискретний*, *континуальний* і *дискретно-континуальний методи* формулювання математичної моделі розрахунку споруди. Якщо стан системи характеризується скінченним числом параметрів, наприклад компонентів переміщень вузлів ферми, рами, або зусиль у стержнях, то модель називають *дискретною*. Такі моделі описуються системами алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів. У випадку, коли стан системи характеризується функціями однієї, двох або трьох змінних, тобто нескінченно великою кількістю параметрів – значень цих функцій, модель називається *континуальною*. Водночас розрізняють *одновимірну* (стержень), *двовимірну* (пластина, оболонка), *тривимірну* (масивне тіло) задачу. Математична модель континуальної системи описується функціональними рівняннями (диференціальними – звичайними

для одновимірної задачі або в частинних похідних для дво- і тривимірної задачі, інтегральними або інтегро-диференціальними рівняннями). Комбіноване використання двох зазначених моделей утворює *дискретно-континуальну модель*.

Контрольні запитання

1. Що таке будівельна механіка?
2. Які задачі відносяться до задач будівельної механіки?
3. Які Ви знаєте типи елементів механічних систем?
4. Що таке стержнева система?
5. Назвіть гіпотези будівельної механіки.
6. Назвіть принципи будівельної механіки.
7. Що називають статичним навантаженням?
8. Що називається динамічним навантаженням?
9. Які навантаження відносять до постійних, які – до тимчасових?
10. Що таке розрахункова схема будівлі або споруди?
11. Що називають математичною моделлю розрахунку споруди?
12. Які використовують методи формулювання математичної моделі розрахунку споруди?
13. Що називають дискретною моделлю системи?
14. Що називають континуальною моделлю системи?

Лекція 2

КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

Кожна споруда впродовж її експлуатації має зазвичай зберігати свою первісну форму у разі дії на неї зовнішніх навантажень. Незначні зміни розмірів елементів споруди можуть відбуватися лише за рахунок їх деформації.

Дослідження відповідності споруди цій вимозі виконується за допомогою *кінематичного аналізу*. В багатьох випадках *кінематичний аналіз* споруди дає змогу визначити найбільш раціональну послідовність її розрахунку.

На практиці у процесі проектування конструкцій будівель та споруд, часто просторову конструкцію розкладають на ряд плоских стержневих систем, після чого здійснюють подальший аналіз і розрахунки кожної з них. Розглянемо кінематичний аналіз плоских стержневих систем.

2.1. Основні поняття кінематичного аналізу

За характером роботи всі механічні системи можна поділити на *геометрично незмінювані*, *геометрично змінювані* і *миттєво змінювані* системи.

Геометрично незмінюваними системами є такі, що не змінюють своєї форми, якщо припустити, що їх елементи виготовлені з абсолютно твердого матеріалу (такого, що не деформується).

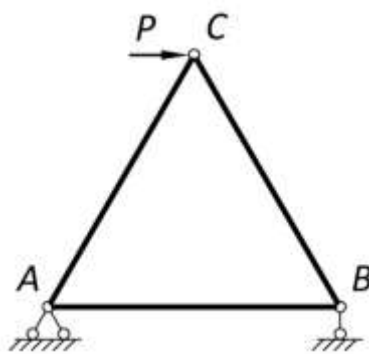


Рис. 2.1

Приклад найпростішої геометрично незмінюваної системи у вигляді шарнірного трикутника наведено на рис. 2.1. Якщо стержні AB , AC і BC не деформуються, зміна положення шарніра C під дією сили P відносно шарнірів A і B можлива лише за рахунок повороту стержнів AC і BC довкола шарнірів A і B , що неможливо через відсутність спільної ділянки шляху відповідних дуг.

Геометрично змінюваними системами називаються такі, що можуть істотно змінити свою форму, якщо припустити, що їх елементи виготовлено з абсолютно твердого матеріалу.

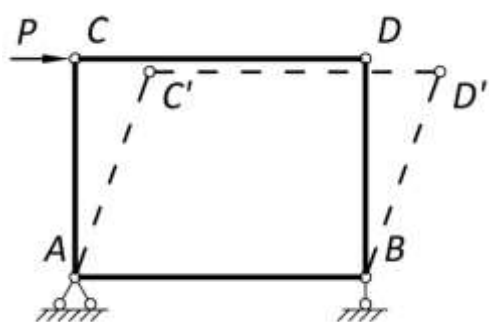


Рис. 2.2

Приклад найпростішої геометрично змінюваної системи у вигляді шарнірного чотирикутника показано на рис. 2.2. Пунктиром показано нову форму, яку може одержати розрахункова схема без будь-яких змін у розмірах її елементів.

Миттєво змінювані системи є такі, точки яких здатні переміщуватись без зміни геометричних розмірів їх елементів з точністю до малих вищого порядку.

У миттєво змінюваній системі дуги AC і BC , за якими можуть повернутись відповідні стержні довкола шарнірів A і B , мають спільну дотичну, і тому точка C може переміститися по вертикалі на деяку відстань без істотної зміни довжин цих стержнів (рис.2.3).

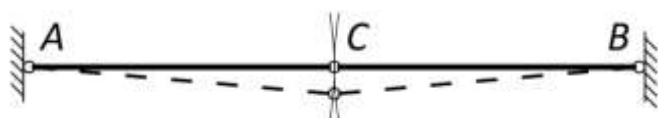


Рис. 2.3

У миттєво змінюваних системах розв'язання рівнянь для визначення зусиль приводить до отримання нескінченних або невизначених значень.

2.2. Конструктивні елементи розрахункових схем

Розрахункова схема споруди складається з конструктивних елементів, які можна поділити на два види: *диски* та *з'єднувальні пристрої*.

Кожен диск окремо та система дисків загалом мають певну кількість *ступенів вільності*.

Ступенем вільності диска або системи дисків називається кількість незалежних геометричних параметрів, що визначають положення диска (системи дисків) відносно будь-якої системи координат.

З'єднувальні пристрої обмежують можливість взаємних переміщень дисків, усуваючи відповідну кількість ступенів вільності.

Диски

Диском може бути названо будь-який елемент або частину розрахункової схеми (споруди), якщо заздалегідь задана або доведена її геометрична незмінюваність (рис. 2.4). Диском можна назвати й усю систему, якщо вона напевно геометрично незмінювана.



Рис. 2.4

Особливо слід відзначити поняття *простого диска*, до якого відносять геометрично незмінювану плоску однозв'язну фігуру, тобто таку фігуру, всі границі якої можна «обійти» вздовж однієї неперервної лінії, не перетинаючи тіло фігури.

Приклади таких *простих плоских дисків* зображені на рис. 2.5. Пунктирними лініями показано неперервні лінії «обходу» границь таких дисків. Окремими випадками простих плоских дисків є диск нескінченно малих розмірів, або матеріальна точка (рис. 2.5, в), прямолінійний (рис. 2.5, г), криволінійний (рис. 2.5, д) і ламаний (рис. 2.5, е) стержні.

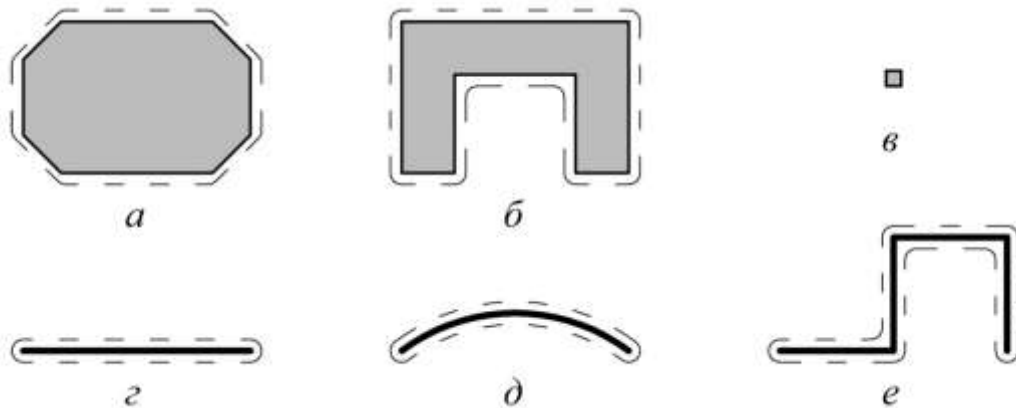


Рис. 2.5

Простий плоский диск скінченних розмірів має три *ступені вільності*, а матеріальна точка – два.

Кількість ступенів вільності диска або системи дисків визначається кількістю незалежних переміщень (лінійних або кутових), які можуть здійснювати елементи системи чи вся система відносно системи координат. Можливість цих переміщень може бути усунена за допомогою *з'єднувальних пристроїв*.

З'єднувальні пристрої

З'єднувальний пристрій (з'єднання) – це елемент розрахункової схеми споруди, який певним чином обмежує взаємне переміщення дисків, що з'єднуються цим пристроєм, зменшуючи її ступінь вільності. Кожен *з'єднувальний пристрій* має певні статичні властивості, що характеризуються видом реактивних сил, які виникають у ньому.

У плоских розрахункових схемах застосовують такі основні типи з'єднань: *кінематичну в'язь, простий циліндричний шарнір, муфту, просту припайку*.

Кінематична в'язь – це тип з'єднання, яке перешкоджає лінійному переміщенню одного диска відносно іншого у напрямку осі, яка проходить через точки шарнірного приєднання в'язі до дисків. Така в'язь зазвичай має вигляд простого стержня C_1 з двома простими шарнірами по обох кінцях (рис. 2.6, а). Вона усуває один ступінь вільності, проте допускає взаємне поступальне переміщення Δ_1 та взаємний поворот дисків Δ_2 по нормалі до осі цієї в'язі.

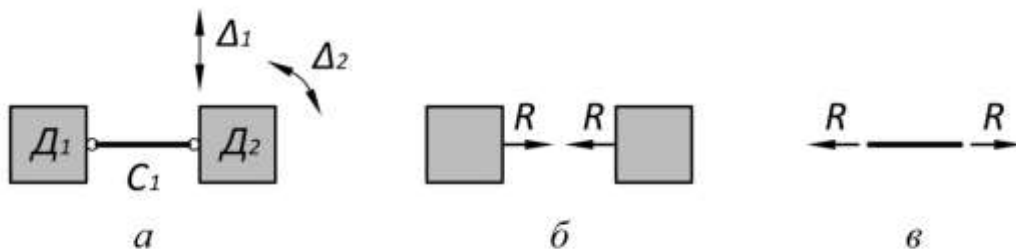


Рис. 2.6

У кінематичній в'язі виникає *реактивна сила (реакція) R*, лінія дії якої проходять вздовж осі в'язі (рис. 2.6, б, в).

Простий циліндричний шарнір – це тип з'єднання, яке з'єднує два диски, усуваючи можливість їх взаємних поступальних переміщень (рис. 2.7, а), але допускає їх взаємний поворот Δ відносно осі, яка проходить через центр шарніра. Це з'єднання зменшує кількість незалежних параметрів руху дисків на два, тобто усуває два ступні вільності.

Реакція R (рис. 2.7, б) у циліндричному шарнірі являє собою силу, яка проходить через його центр, але має заздалегідь невідомий

напрямок, який може бути визначений у подальшому розрахунку. Для аналітичного розрахунку її зазвичай замінюють на дві непаралельні складові V і H , які зручно обрати взаємно ортогональними (рис. 2.7, в).

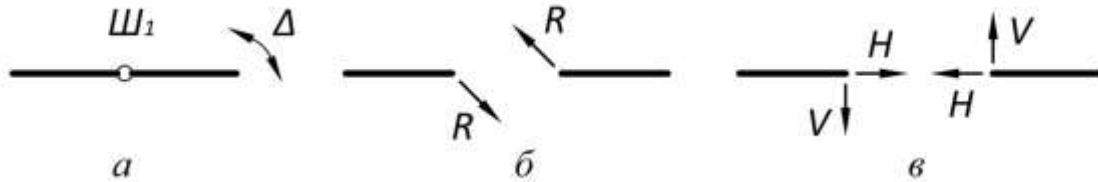


Рис. 2.7

Муфта – це тип з’єднання, яке допускає одне взаємне переміщення – лінійне Δ двох дисків, які з’єднуються, вздовж фіксованої прямої (рис. 2.8, а). Це з’єднання зменшує кількість незалежних параметрів руху дисків, усуваючи два ступені вільності.

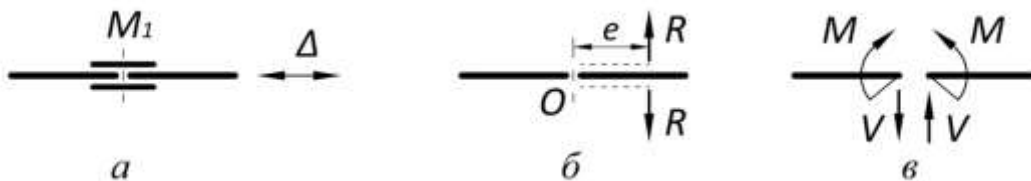


Рис. 2.8

Реакція в муфті представляє силу R , нормальну до напрямку можливого взаємного поступального переміщення дисків і розміщену з ексцентриситетом e відносно центра муфти O (рис.2.8, б). Цю реакцію замінюють на дві складові – силу V і момент M , відносячи їх до центра муфти O (рис.2.8, в).

Проста припайка – це тип з’єднання, яке повністю виключає взаємні лінійні та кутові переміщення двох дисків, які нею з’єднуються (рис. 2.9, а). Це з’єднання зменшує кількість незалежних параметрів руху дисків, усуваючи три ступені вільності.

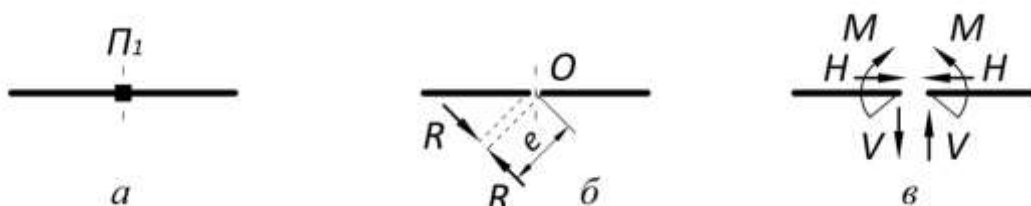


Рис. 2.9

Реакція в припайці – це сила R , лінія дії та ексцентриситет e якої відносно центра припайки O заздалегідь невідомі (рис.2.9, б). Цю реакцію зручно замінювати на три складові, віднесені до центра припайки O : двох взаємно перпендикулярних сил V і H , а також момента M (рис.2.9, в).

Опорні пристрої

Якщо з'єднувальний пристрій приєднує споруду чи якийсь її елемент до опорного диска – «землі», такий пристрій є *опорним*, або *опорою*. В плоских розрахункових схемах застосовують такі типи *опорних пристроїв (опор)*: *шарнірно-рухома опора* (рис. 2.10) – еквівалентна щодо простої кінематичної в'язі; *шарнірно-нерухома опора* (рис. 2.11) – відповідає простому циліндричному шарніру; *повзун* (рис. 2.12) – ідентичний до муфти; *жорстке затиснення* (рис. 2.13) – є простою припайкою.

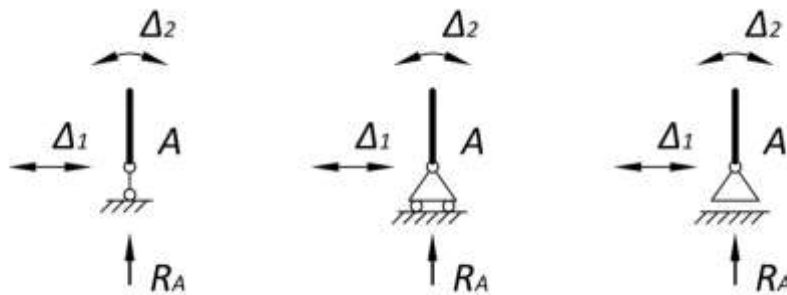


Рис. 2.10

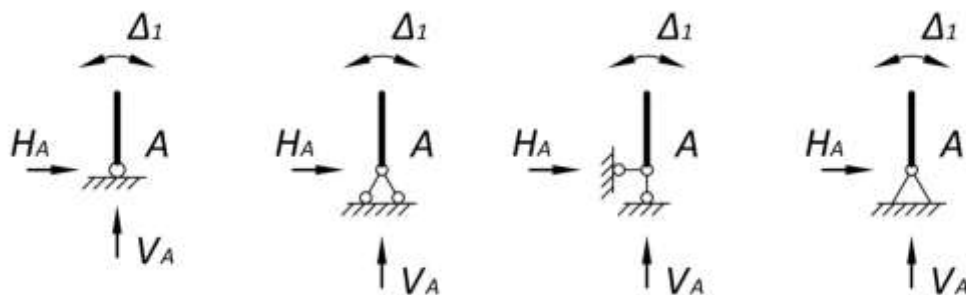


Рис. 2.11

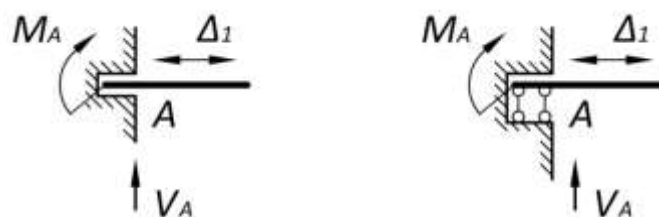


Рис. 2.12

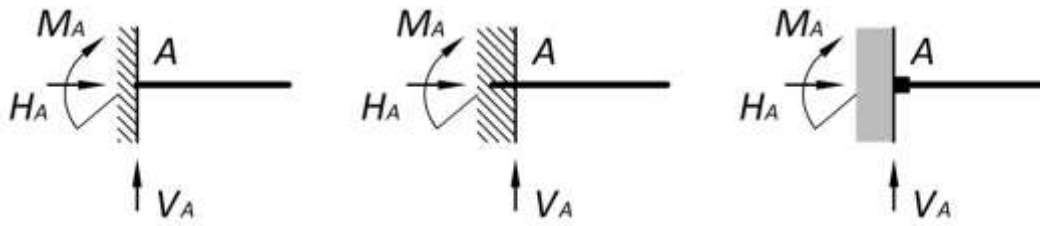


Рис. 2.13

На наведених для кожної опори схемах показані різні способи їх зображення в розрахункових схемах, їх кінематичні властивості, тобто можливі складові переміщень відносно «землі», та їх статичні властивості, тобто складові реакцій, які передаються на елементи споруди з боку «землі».

2.3. Визначення ступеня геометричної змінюваності.

Кінематичний аналіз плоских стержневих систем поділяється на декілька етапів: *кількісний етап кінематичного аналізу*; *якісний (структурний) етап кінематичного аналізу*; *остаточний висновок про геометричну незмінюваність, геометричну або миттєву змінюваність розрахункової схеми споруди*.

Кількісний етап має за мету визначення кількості ступенів вільності всієї розрахункової схеми, тобто сумарної кількості ступенів вільності (кількість незалежних параметрів руху), які визначають положення елементів системи відносно якоїсь нерухомої системи координат. Цю величину називають *ступінь геометричної змінюваності* системи.

Виходячи з викладених кінематичних властивостей елементів розрахункової схеми споруди, можна записати формулу (модифікацію формули Чебишова) для визначення ступеня геометричної змінюваності Γ системи:

$$\Gamma = 3D + 2B - 3\Pi - 2Ш - C - 3, \quad (2.1)$$

де D – кількість простих дисків, включаючи опорний диск – «землю», якщо система прикріплена до неї (рис. 2.14); B – кількість вузлів в'язей (рис. 2.14, а), тобто кількість матеріальних точок (рис. 2.14, б), тобто точок, в яких з'єднуються тільки кінематичні в'язі; Π – кількість простих припайок; $Ш$ – кількість простих шарнірів (рис.

2.14, в); C – кількість простих в'язей (стержнів); 3 (три) – число ступенів вільності всієї плоскої розрахункової схеми як твердого тіла в її площині.

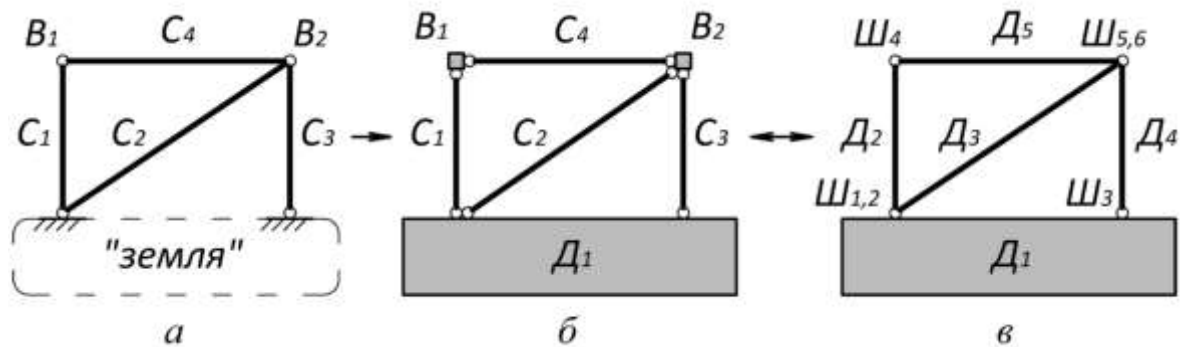


Рис. 2.14

Опорні пристрої беруться у формулі відповідно до еквівалентних з'єднувальних пристроїв. Складні шарніри та припайки зараховуються як відповідна до них кількість простих шарнірів і припайок.

Для зображеної на рис. 2.14, а розрахункової схеми визначення ступеня геометричної змінюваності можна здійснити декількома різними варіантами.

Варіант 1. Вважати, що стержні C_1, C_2, C_3, C_4 системи є простими кінематичними в'язями, які з'єднуються у вузлах в'язей B_1 та B_2 , що є матеріальними точками, а також з'єднують ці матеріальні точки з простим диском D_1 (рис. 2.14, б). Тоді, для такої схеми:

- кількість простих дисків $D=1$;
- кількість вузлів в'язей $V=2$;
- кількість простих в'язей (стержнів) $C=4$.

Припайки та прості шарніри в такій схемі – відсутні ($II=0, III=0$).

За формулою (2.1) отримаємо:

$$\Gamma = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 4 - 3 = 0.$$

Варіант 2. Вважати, що стержні C_1, C_2, C_3, C_4 є простими дисками D_2, D_3, D_4, D_5 , які з'єднуються у вузлах між собою та диском D_1 простими шарнірами $Ш_1, Ш_2, Ш_3, Ш_4, Ш_5, Ш_6$ (рис. 2.14, в). Тоді, для такої схеми:

- кількість простих дисків $D=5$;

кількість простих шарнірів $III=6$.

У такій схемі вузли в'язей, припайки, кінематичні в'язі – відсутні ($B=0, P=0, C=0$).

За формулою (2.1) отримаємо:

$$G = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 6 - 0 - 3 = 0.$$

Ступінь геометричної змінюваності розрахункової схеми, обчислену за формулою (2.1), дає змогу визначити її кінематичну характеристику:

- якщо $G > 0$, розрахункова схема споруди безперечно є геометрично змінюваною. Цей результат засвідчує, що з'єднувальних пристроїв не вистачає для усунення можливості переміщень, які можуть робити окремі елементи системи або вся система в цілому;
- якщо $G \leq 0$, можна стверджувати, що виконується необхідна умова геометричної незмінюваності розрахункової схеми, бо з'єднувальні пристрої можуть забезпечити нерухомість усіх елементів і системи в цілому. Проте з'єднувальні пристрої можуть бути встановлені в такий спосіб, що в одних зонах конструкції кількість їх надмірна, а в інших – недостатня.

Отже, якщо $G \leq 0$ розрахункова схема може бути або геометрично незмінюваною або геометрично змінюваною, або, нарешті, миттєво змінюваною залежно від розташування дисків і з'єднань. Належність до конкретного типу остаточно встановлюється на підставі виконання *якісного етапу аналізу* розрахункової схеми.

Якісний (структурний) етап аналізу розрахункової схеми полягає у визначенні послідовності та способів утворення системи з елементів. З'єднання всієї системи або її фрагментів має виконуватись відповідно до способів правильного з'єднання елементів у геометрично незмінювані системи.

Отже, для геометричної незмінюваності плоскої розрахункової схеми споруди необхідне додержання двох умов: необхідна умова – $G \leq 0$; достатня умова – правильність утворення системи.

Контрольні запитання

1. Що є геометрично незмінюваною системою?
2. Що називають геометрично змінюваною системою?
3. Що називають миттєво змінюваною системою?
4. Що називають диском?
5. Що таке з'єднувальний пристрій або з'єднання?
6. Які типи з'єднань застосовують у плоских розрахункових схемах?
7. Що таке кінематична в'язь, простий циліндричний шарнір, муфта, проста припайка?
8. Які опорні пристрої використовують у розрахункових схемах споруд?
9. На які етапи поділяється кінематичний аналіз плоских стержневих систем?
10. Що таке ступінь геометричної змінюваності системи і як вона визначається?
11. В чому полягає кількісний етап кінематичного аналізу?
12. В чому полягає якісний етап кінематичного аналізу?

Лекція 3

СПОСОБИ УТВОРЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЗМІНЮВАНИХ СИСТЕМ

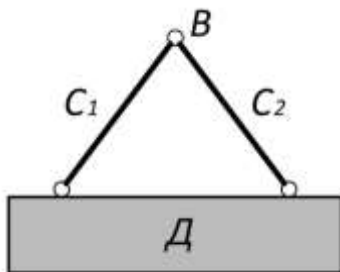
Розглянемо основні способи утворення найпростіших геометрично незмінюваних плоских систем у разі використання мінімальної кількості з'єднувальних пристроїв. Надамо певні назви цим способам для зручності їх подальшого викладу.

Для подання цих способів і прикладів структурного аналізу зручно використовувати умовну «формулу», яка розміщується поруч з відповідною схемою з'єднання. Така «формула» виглядає як дріб, де в чисельнику міститься перелік з'єднаних елементів, а у знаменнику – перелік з'єднувальних пристроїв, а після знака \Rightarrow – позначення нового укрупненого диска. Якщо з'єднання виконано за допомогою *фіктивного шарніра*, в знаменнику подається найменшання двох в'язей, що утворюють цей шарнір, із символом « \times » між ними.

Фіктивним шарніром називається такий уявний шарнір, який розташований у точці перетину самих в'язей або їх осей.

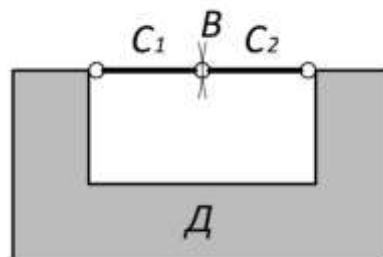
3.1. Приєднання шарнірного вузла до диска (спосіб «діад»)

Шарнірний вузол (матеріальну точку) B можна приєднати до диска D за допомогою двох простих кінематичних в'язей C_1 і C_2 , що не лежать на одній прямій (рис. 3.1, *а*). Якщо в'язі C_1 і C_2 розташовані на одній прямій (рис. 3.1, *б*), утворюється, так звана, миттєво змінювана система, яку не можна використовувати в будівництві.



$$\frac{D+B}{C_1, C_2} \Rightarrow D$$

а



$$\frac{D+B}{C_1, C_2} \Rightarrow \text{мит.зм.}$$

б

Рис. 3.1

З'єднання трьох кінематичних в'язей трьома шарнірами (див. рис. 2.1) можна розглядати як спосіб «діад», якщо одну кінематичну в'язь, наприклад AB , розглядати як диск, до якого двома в'язями приєднується вузол C .

3.2. З'єднання двох дисків

Зручно розглядати три способи приєднання одного диска до іншого, хоча використання відповідності між різними з'єднувальними пристроями дає змогу привести їх один до одного.

Спосіб припайки

За способом припайки два диски D_1 і D_2 можуть бути з'єднані між собою за допомогою припайки Π (рис. 3.2).

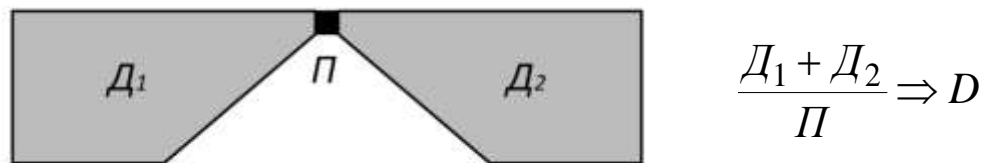


Рис. 3.2

Спосіб Полонсо

Спосіб Полонсо полягає в тому, що два диски D_1 і D_2 можна з'єднати шарніром Ш і кінематичною в'яззю C , вісь якої не проходить через центр шарніра Ш (рис. 3.3, а). Якщо вісь в'язі C проходить через центр шарніра Ш (рис. 3.3, б), одержана таким чином система є миттєво змінюваною.

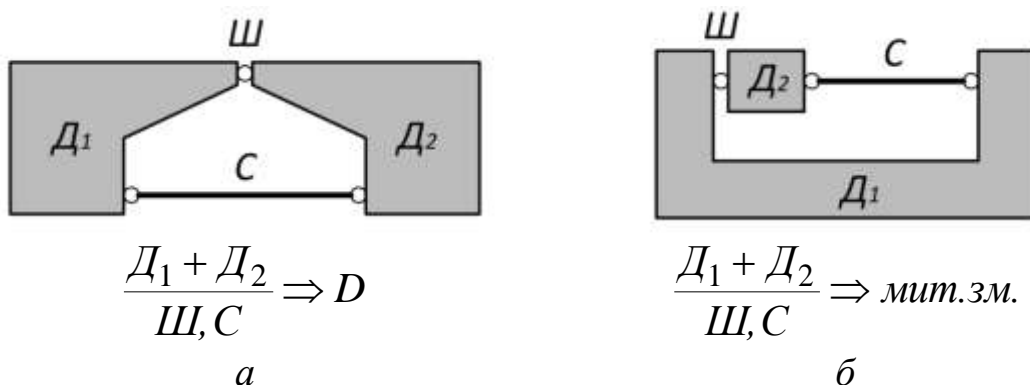


Рис. 3.3

Як спосіб Полонсо можна трактувати попарне з'єднання трьох кінематичних в'язей трьома шарнірами (див. рис. 2.1): два диски AC і BC з'єднуються кінематичною в'яззю AB та шарніром C .

Спосіб Шухова

Спосіб Шухова передбачає, що два диски D_1 і D_2 можуть бути з'єднані трьома кінематичними в'язями C_1, C_2 і C_3 , осі яких не перетинаються в одній точці, а отже, й не паралельні між собою (рис. 3.4, *а*). Якщо осі трьох з'єднувальних в'язей C_1, C_2 і C_3 одночасно перетинаються в одній точці O (рис. 3.4, *б*) або всі вони паралельні одна щодо одної (рис. 3.4, *в*), то утворена система буде миттєво змінюваною.

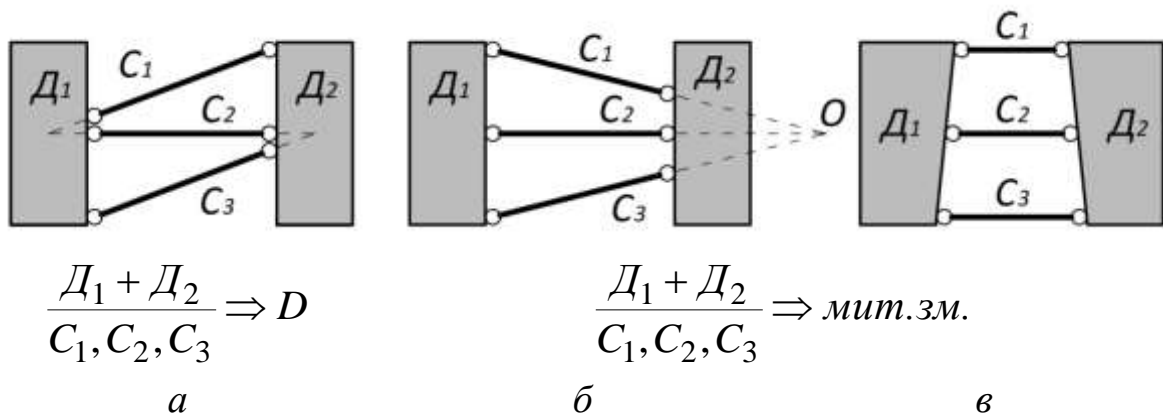


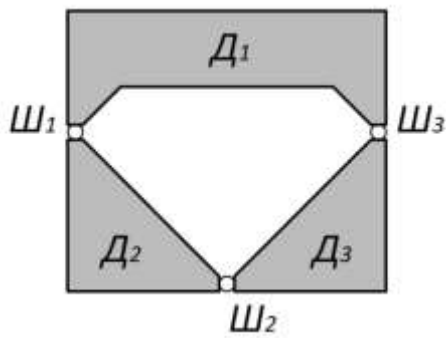
Рис. 3.4

В останньому випадку якщо в'язі C_1, C_2 і C_3 матимуть однакову довжину, система двох дисків буде геометрично змінюваною.

3.3. З'єднання трьох дисків (спосіб шарнірного трикутника)

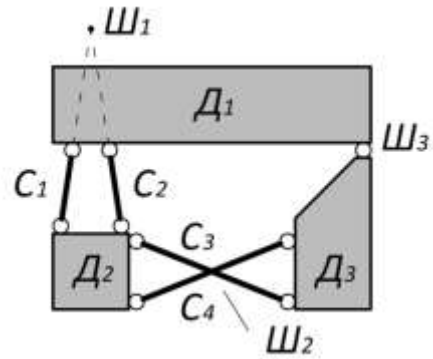
Три диски D_1, D_2 і D_3 можна з'єднати за допомогою трьох шарнірів (реальних або фіктивних) $Ш_1, Ш_2$ і $Ш_3$, які не лежать на одній прямій. Причому фіктивні шарніри (але не більш, ніж два з них) можуть бути і нескінченно віддаленими.

Так, усі три шарніри $Ш_1, Ш_2$ і $Ш_3$, які з'єднують три диски D_1, D_2 і D_3 на рис. 3.5, *а*, є дійсними.



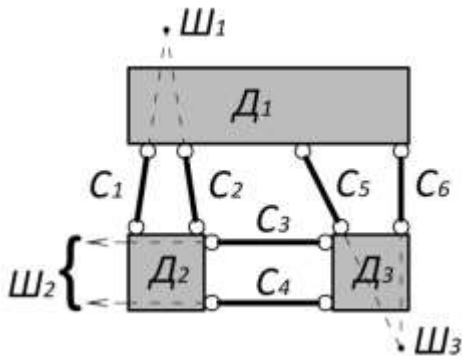
$$\frac{D_1 + D_2 + D_3}{Ш_1, Ш_2, Ш_3} \Rightarrow D$$

а



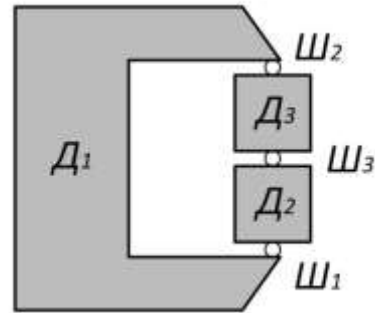
$$\frac{D_1 + D_2 + D_3}{\underbrace{C_1 \times C_2}_{Ш_1}, \underbrace{C_3 \times C_4}_{Ш_2}, Ш_3} \Rightarrow D$$

б



$$\frac{D_1 + D_2 + D_3}{\underbrace{C_1 \times C_2}_{Ш_1}, \underbrace{C_3 \times C_4}_{Ш_2}, \underbrace{C_5 \times C_6}_{Ш_3}} \Rightarrow D$$

в



$$\frac{D_1 + D_2 + D_3}{Ш_1, Ш_2, Ш_3} \Rightarrow \text{мит.зм.}$$

г

Рис. 3.5

На рис. 3.5, б диски D_1 і D_3 з'єднані дійсним шарніром $Ш_3$, диски D_1 і D_2 – фіктивним шарніром $Ш_1$, розташованим у точці перетину осей в'язей C_1 і C_2 , що його утворюють, а диски D_2 і D_3 – фіктивним шарніром $Ш_2$, утвореним в'язями C_3 і C_4 і розташованим на перетині їх осей.

На рис. 3.5, в всі три з'єднувальних шарніри є фіктивними: диски D_1 і D_2 з'єднані в'язями C_1 і C_2 , що утворюють фіктивний шарнір $Ш_1$, розташований на перетині їх осей; диски D_2 і D_3 з'єднані в'язями C_3 і C_4 що утворюють нескінченно віддалений фіктивний

шарнір $Ш_2$; диски $Д_1$ і $Д_3$ з'єднані в'язями $С_5$ і $С_6$, що утворюють на перетині своїх осей фіктивний шарнір $Ш_3$.

Якщо три шарніри $Ш_1$, $Ш_2$ і $Ш_3$, дійсні чи фіктивні, розташовані на одній прямій (рис. 3.5, *г*) або всі нескінченно віддалені, то кажуть, що система з трьох дисків $Д_1$, $Д_2$ і $Д_3$ є миттєво змінюваною.

Контрольні запитання

1. Які існують способи утворення геометрично незмінюваних систем?
2. Що називають фіктивним шарніром?
3. Що є дійсним шарніром?
4. За якою необхідною і якою достатньою умовою розрахункову схему можна вважати геометрично незмінюваною?
5. В чому полягає спосіб «діад»?
6. Які існують способи з'єднання двох дисків?
7. В чому полягає спосіб Полонсо?
8. За якою умовою за способом Шухова диски можуть бути з'єднані кінематичними в'язями в геометрично незмінювану систему?
9. За якою умовою за способом шарнірного трикутника диски можуть бути з'єднані в геометрично незмінювану систему?
10. Скільки нескінченно віддалених фіктивних шарнірів може бути в схемі способу шарнірного трикутника?

Лекція 4

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ. ОСНОВИ СТАТИЧНОГО РОЗРАХУНКУ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

Статично визначувана система є така геометрично незмінна система, для якої зусилля у всіх її елементах можуть бути визначені із застосуванням лише рівнянь рівноваги (тобто кількість невідомих дорівнює кількості незалежних рівнянь).

Статично визначувана система має лише ті в'язі, які є необхідними для забезпечення її геометричної незмінності.

Статичний розрахунок споруди полягає у визначенні сил, які виникають в її елементах під впливом різних прикладених до цієї споруди зовнішніх дій – навантажень.

Всі сили, що діють на споруду, можна поділити на *зовнішні* та *внутрішні*. До *зовнішніх* належать як безпосередньо діючі на споруду навантаження, так і реакції опор, що прикріплюють її до основи – «землі». Всі сили, які виникають у тілі елементів і у в'язях, що з'єднують ці елементи, під час розгляду всієї споруди вважаються *внутрішніми*.

Отже, задачу статичного розрахунку можна розділити на дві складові:

1. Визначення реакцій в'язей, що виникають між елементами споруд зокрема й реакцій опорних пристроїв – *зовнішня задача*.
2. Визначення внутрішніх сил, до яких належать інтегральні характеристики напружень, що виникають в елементах споруди в процесі їх деформування – *внутрішня задача*.

Кожну *внутрішню силу* можна перетворити на *зовнішню*, якщо знищити той зв'язок, якому вона відповідає. Це твердження є однією з форм так званого *принципу звільнення від в'язей*, що лежить в основі механіки.

Найпоширенішим і загальним способом розв'язання як зовнішньої, так і внутрішньої задачі статички є використання *методу перерізів*. Цей метод полягає в тому, що від споруди наскрізним перерізом, який проходить через з'єднання, відокремлюється якийсь її

фрагмент (елемент, група елементів). Розрізані в'язі (з'єднання) відкидаються і замінюються силами – реакціями цих в'язей. Таким чином, на відокремлений фрагмент діє система зовнішніх сил, яка складається з безпосередньо діючих на нього навантажень і реакцій відкинутих в'язей.

Фрагмент споруди під дією системи зовнішніх сил відповідно до аксіоми статички може розглядатися як абсолютно тверде тіло. Тому до цієї системи сил можна застосувати умови її рівноваги, які дають змогу визначити невідомі реакції в'язей.

4.1. Визначення реакцій в'язей – зовнішня задача

Кількість реакцій в'язей, що з'єднують між собою елементи споруди і приєднують всю споруду до «землі»

$$R = C + 2Ш + 3П, \quad (4.1)$$

де C – кількість простих в'язей, $Ш$ – кількість простих шарнірів, $П$ – кількість простих припайок.

Кількість рівнянь рівноваги, що можна скласти для розрахункової схеми споруди, яка складається з $Д$ простих дисків і $В$ вузлів в'язей, визначається виразом

$$U = 3Д + 2В - 3. \quad (4.2)$$

Водночас беруть до уваги те, що: до диска прикладається довільна система сил, для якої можна скласти три рівняння рівноваги; на вузол в'язів діє збіжна система сил, для якої можна записати два рівняння рівноваги; доданок « -3 » введено у цей вираз тому, що рівняння рівноваги складаються відносно нерухомої системи координат, яка зв'язана з одним із дисків, який вважається нерухомим (наприклад, із землею).

Якщо кількість невідомих реакцій в'язей R збігається з кількістю рівнянь рівноваги U , які можна скласти для всіх елементів системи, то всі реакції в'язей можуть бути визначені з одержаної системи рівнянь.

Розрахункові схеми споруд, для яких всі реакції в'язей можуть бути визначені з рівнянь рівноваги (рівнянь статички), належать до *статично визначуваних систем*.

Якщо кількість невідомих реакцій в'язей R перевищує кількість рівнянь рівноваги U , для визначення реакцій недостатньо рівнянь рівноваги і необхідно вдаватися до використання додаткових умов. Означені системи називаються *статично невизначуваними*.

Число, відповідне перевищенню кількості реакцій в'язей над кількістю рівнянь рівноваги, називається *ступенем статичної невизначуваності* системи:

$$n = R - U = (C + 2Ш + 3П) - (3Д + 2В - 3) = -\Gamma. \quad (4.3)$$

Отже, для геометрично незмінюваних і статично визначуваних систем виконується будь-яке з двох співвідношень:

$$n=0 \quad \text{або} \quad \Gamma=0. \quad (4.4)$$

Для геометрично незмінюваних і статично невизначуваних систем

$$n>0 \quad \text{або} \quad \Gamma<0. \quad (4.5)$$

Для визначення реакцій в'язей геометрично незмінюваних і статично визначуваних систем, що задовольняють співвідношенню (4.4), застосовується *метод перерізів*.

За такої умови замкненими перерізами можна відокремити всі диски та вузли в'язей, що складають систему. Для кожного диска, на який діє довільна система сил, і кожного вузла, що перебуває під дією збіжної системи сил, можна скласти рівняння рівноваги. Реакції в'язей можуть бути визначені з одержаної системи лінійних рівнянь.

Між тим застосування системи сумісних рівнянь для визначення реакцій в'язей недоцільно через значну трудомісткість. Необхідно намагатись скласти рівняння рівноваги в такий спосіб, щоби кожна невідома реакція визначалася з одного незалежного рівняння, в крайньому випадку для їх визначення необхідно було б розв'язати систему двох рівнянь з двома невідомими.

Цієї мети можна досягти, якщо визначення реакцій в'язей пов'язувати зі способом з'єднання елементів у геометрично незмінювану систему, оскільки кожному способу з'єднання відповідає доцільний спосіб складання рівнянь рівноваги. Розглянемо ці способи.

Елементи з'єднані способом діад

Для визначення реакцій двох в'язей, що приєднують шарнірний вузол до диска (рис. 4.1, а), вузол відокремлюється від диска замкненим перерізом 1-1 (рис. 4.1, б). Для визначення реакцій R_1 і R_2 у в'язях складаються два рівняння рівноваги одержаної таким чином системи збіжних сил.

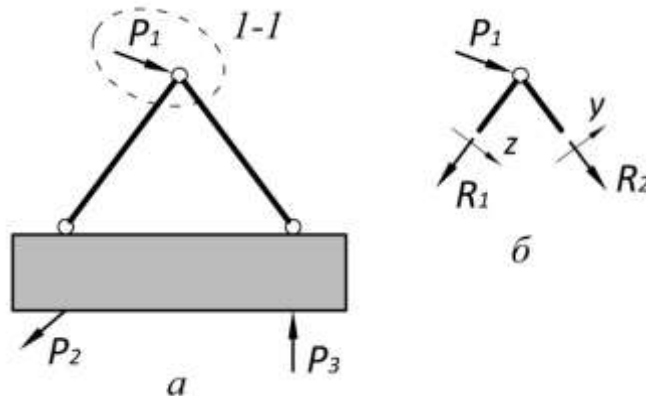


Рис. 4.1

Кожне рівняння вміщуватиме тільки одне невідоме, якщо координатні осі спрямовувати перпендикулярно до кожної з двох в'язей:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_1; \quad \sum F_z = 0 \Rightarrow R_2.$$

Елементи з'єднані способом припайки

Якщо два диски з'єднуються припайкою (рис. 4.2, а), доцільно провести замкнений переріз 1-1 через центр припайки O .

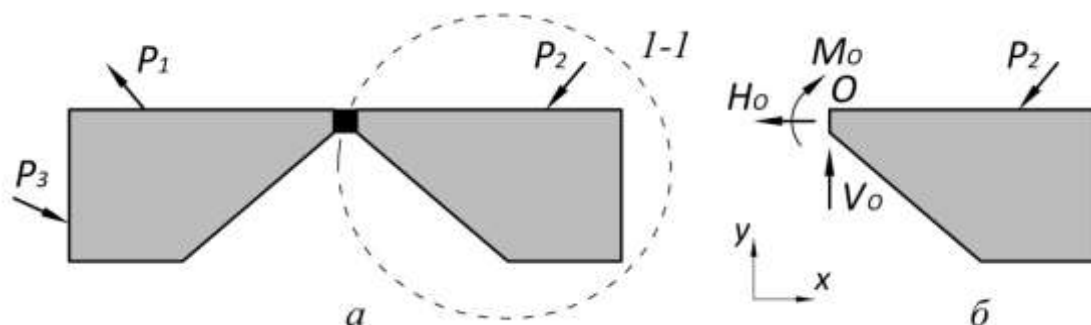


Рис. 4.2

У місці розрізу прикладаються невідомі реактивні сили. Для однієї з відокремлених частин, наприклад, правої частини (рис. 4.2, б), можна скласти три рівняння рівноваги, кожне з яких містить одну невідому величину:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_o; \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow H_o; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow V_o.$$

Елементи з'єднані способом Полонсо

У системах, що створені способом Полонсо (рис. 4.3, а), необхідно визначити реакції в шарнірі C і кінематичній в'язі AB , що з'єднують два диски. Для цього виконується замкнений переріз 1-1 через шарнір C і в'язь AB (рис. 4.3, а). Цей переріз поділяє систему на дві частини. Реакція R у в'язі AB спрямована вздовж її осі. Невідома реактивна сила в шарнірі C відображується двома складовими, одну з яких H_C зручно спрямувати паралельно, а другу V_C – перпендикулярно до реакції R . Реакції R , H_C і V_C визначаються з рівнянь рівноваги будь-якої з відокремлених частин, наприклад, правої (рис. 4.3, б):

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow R; \quad \sum M_o = 0 \Rightarrow H_c; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow V_c.$$

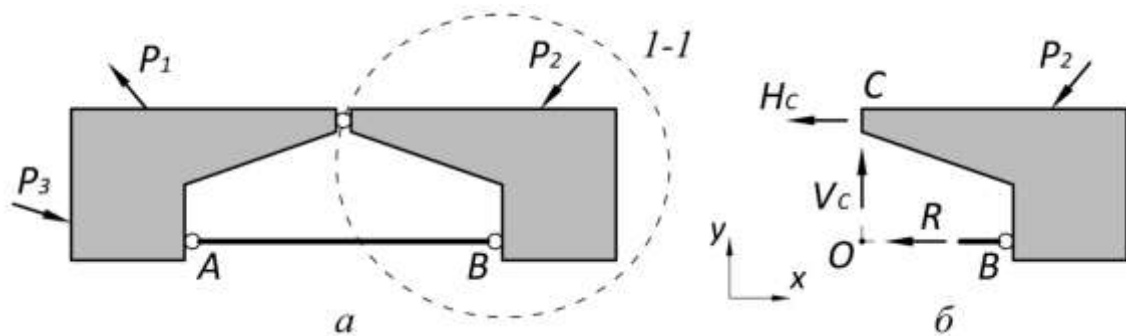


Рис. 4.3

Елементи з'єднані способом Шухова

Для визначення реакцій трьох в'язей, що з'єднують два диски системи, утвореної за способом Шухова (рис. 4.4, а), виконується наскрізний замкнений переріз 1-1 і розглядається рівновага будь-якого з дисків.

На рис. 4.4, б показаний правий диск. На нього діє зовнішня сила P_2 і невідомі реакції в'язей R_1 , R_2 і R_3 . Можна скласти три рівняння рівноваги цього диска, що відповідає кількості невідомих. Для того щоб кожне рівняння містило лише одну невідому реакцію в якійсь в'язі, запишемо рівняння у вигляді суми моментів сил відносно точки перетину осей двох інших в'язей. Цей спосіб складання рівнянь називається *способом моментної точки* (спосіб *Pittem*-

ра), а відповідні точки називаються *моментними точками* або *точками Риттера*.

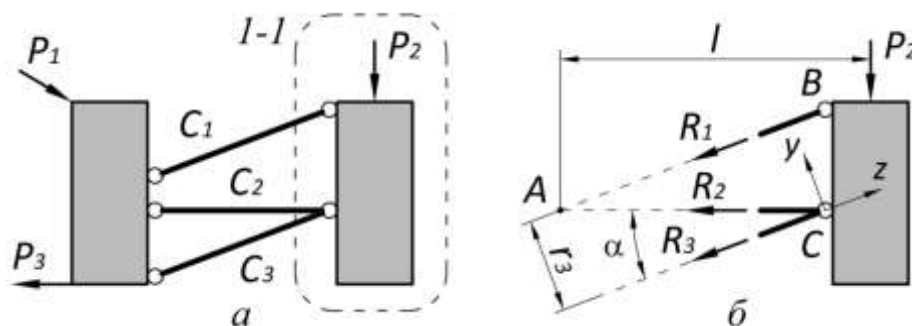


Рис. 4.4

Реакція R_3 у в'язі C_3 визначається рівнянням рівноваги моментів відносно точки A , що утворена на перетині осей в'язей C_1 і C_2 :

$$\sum M_A = 0; \quad P_2 \cdot l + R_3 \cdot r_3 = 0; \quad R_3 = -P_2 \frac{l}{r_3}.$$

Реакція R_1 визначається рівнянням рівноваги моментів відносно точки C , що утворена на перетині осей в'язей C_2 і C_3 :

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow R_1.$$

Якщо дві з трьох в'язей C_1 , C_3 (рис. 4.4, а) розташовано паралельно, для визначення реакції R_2 (рис. 4.4, б) в'язі C_2 *способом Риттера* не може бути використано, оскільки моментна точка буде знаходитись в нескінченності. У цьому випадку рівняння рівноваги складається в формі суми проекцій сил, що діють на відокремлену частину, на вісь, що перпендикулярна до двох інших паралельних в'язей. Рівняння рівноваги для визначення реакції R_2 в'язі C_2 можна записати у вигляді:

$$\sum F_y = 0; \quad R_2 \cdot \sin \alpha - P_2 \cdot \cos \alpha = 0; \quad R_2 = \frac{P_2 \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Елементи з'єднані способом шарнірного трикутника

Розглянемо визначення реакцій у трьох шарнірах, що з'єднують три диски за способом шарнірного трикутника (рис. 4.5, а).

Наскрізним замкненим перерізом, що перетинає два будь-яких шарніри (наприклад перерізом 1-1 через шарніри A і B), розділяємо систему на дві частини і розглядаємо рівновагу частини, яка скла-

дається з двох дисків D_1 і D_2 (рис. 4.5, б). Реакцію в кожному розрізаному шарнірі зображуємо у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових V_A і H_A (в шарнірі A) і V_B і H_B (в шарнірі B). Водночас складові H_A і H_B спрямовуємо по прямій, що з'єднує центри розрізаних шарнірів A і B .

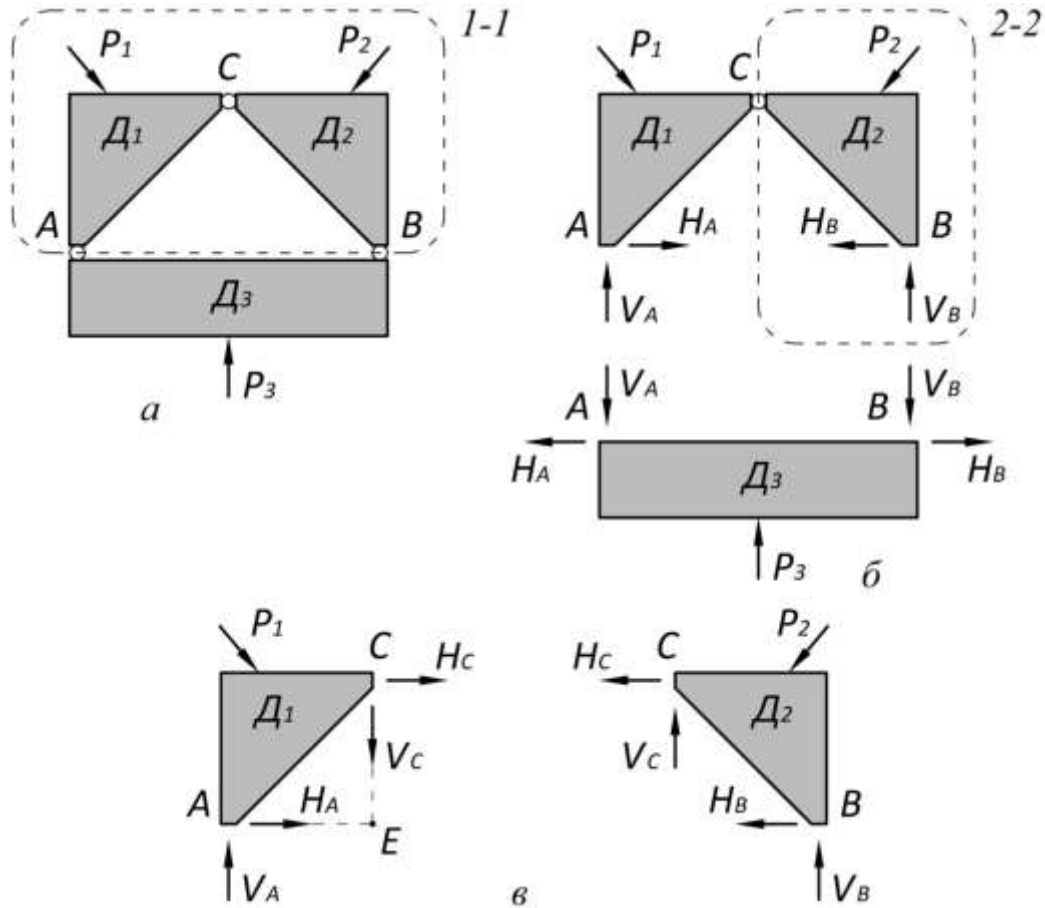


Рис. 4.5

Складові V_A і V_B можуть бути визначені з рівнянь рівноваги:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B; \quad \sum M_B = 0 \Rightarrow V_A.$$

Виконаємо наскрізний переріз 2-2 через третій шарнір C відокремленої частини і розглянемо рівновагу одного з дисків, наприклад D_1 (рис. 4.5, в). Складові V_C і H_C реакції в шарнірі C спрямуємо паралельно до відповідних складових реакцій у шарнірах A і B .

Складові V_A і V_B вже відомі, тому з умов рівноваги диска одержуємо

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow H_A; \quad \sum M_E = 0 \Rightarrow H_C; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow V_C.$$

Нарешті, складову H_B можна обчислити з рівняння рівноваги системи дисків D_1-D_2 :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_B.$$

4.2. Визначення зусиль в елементах споруди – внутрішня задача

Якщо зовнішні сили, до яких належать безпосередньо прикладені до споруди силові фактори, в тому числі реакції в'язей, звичайно діють на неї дискретно, то внутрішні сили поширюються на все тіло елементів споруди.

У стержневих елементах прийнято внутрішні сили відносити до кожного їх поперечного перерізу і прикладати до центра ваги перерізу. Внутрішні сили в перерізі стержня поділяють на *згинальні моменти, поперечні та поздовжні сили*.

Згинальним моментом у перерізі стержня називається головний момент усіх зовнішніх сил, розташованих з одного боку від перерізу.

Згинальний момент є інтегральною характеристикою нормальних напружень.

Згинальний момент у перерізі стержня визначається як сума моментів усіх сил, розташованих по один бік від перерізу, відносно центра ваги перерізу.

Загальне правило знаків для згинальних моментів у стержневих системах не визначено. На епюрах згинальних моментів ординати необхідно відкладати з боку розтягнутих волокон. Для балок і арок згинальний момент вважається додатним, якщо він розтягує нижнє волокно.

Поперечною силою в перерізі стержня, яка є інтегральною характеристикою зсуваючих напружень, називають проекцію головного вектора сил, розташованих з одного боку стержня, на площину перерізу.

Поперечна сила в перерізі стержня визначається як сума проєкцій всіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на нормаль до осі стержня в цьому перерізі.

Поперечна сила вважається додатною, якщо вона намагається повернути відповідну частину стержня за годинниковою стрілкою відносно перерізу.

Поздовжньою силою в перерізі стержня, яка є інтегральною характеристикою напружень поздовжньої деформації, називають проекцію головного вектора сил, розташованих з одного боку стержня, на нормаль до площини перерізу.

Поздовжня сила в перерізі стержня визначається як сума проєкцій всіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на дотичну до осі стержня в цьому перерізі.

Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона розтягує стержень.

Так, внутрішні сили в перерізі $I-I$ стержня, зображеного на рис. 4.6, *a*, можна визначити, розглядаючи ліву від цього перерізу частину стержня. Тоді:

$$M_{I-I} = \sum M_{I-I}^{лив.} = -P_1 \cdot r_1 - P_2 \cdot r_2;$$

$$Q_{I-I} = \sum Q_{I-I}^{лив.} = -P_1 \cdot \sin \varphi - P_2 \cdot \cos \varphi;$$

$$N_{I-I} = \sum N_{I-I}^{лив.} = -P_1 \cdot \cos \varphi + P_2 \cdot \sin \varphi.$$

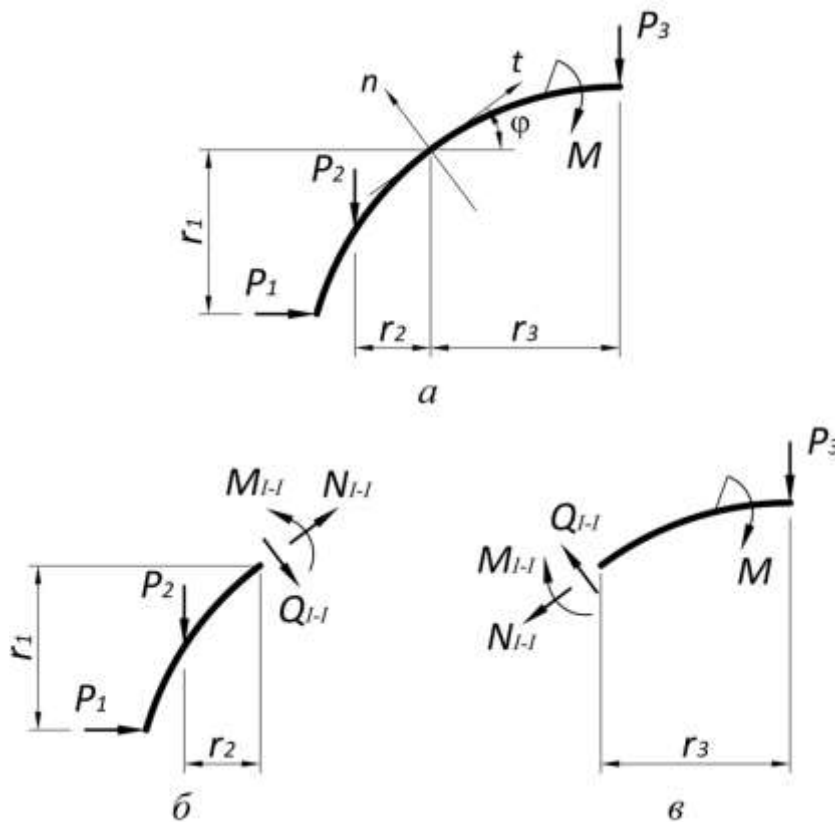


Рис. 4.6

Ті самі внутрішні сили можна визначити, розглядаючи праву від перерізу частину стержня:

$$M_{I-I} = \sum M_{I-I}^{np.} = -P_3 \cdot r_3 - M;$$

$$Q_{I-I} = \sum Q_{I-I}^{np.} = + P_3 \cdot \cos \varphi;$$

$$N_{I-I} = \sum N_{I-I}^{np.} = -P_3 \cdot \sin \varphi.$$

Обчислюючи величини Q і N знаки проєкцій сил на осі n і t про- ставляються відповідно до правила знаків поперечних і поздовжніх сил, а не до напрямку координатних осей.

Визначення внутрішніх сил у перерізі стержня може бути зведе- но до розв'язання зовнішньої задачі, якщо розглядати стержень як два окремих стержні, з'єднаних у перерізі припайкою. У цьому ви- падку згинальний момент у перерізі може тлумачитись як реактив- ний момент у припайці, а поперечна і поздовжня сили – як складові реакції припайки, відповідно паралельна і перпендикулярна до осі стержня в перерізі. Для визначення складових реакції припайки стержень перерізається по припайці та складаються рівняння рівно- ваги лівої (рис. 4.6, б) або правої (рис. 4.6, в) частини стержня.

Контрольні запитання

1. Що таке статично визначувана система?
2. В чому полягає статичний розрахунок споруди?
3. Які сили вважаються зовнішніми, а які внутрішніми?
4. На які складові можна поділити задачу статичного розрахунку?
5. Як і для чого можна перетворити внутрішню силу на зовнішню?
6. В чому полягає метод перерізів?
7. Які розрахункові схеми споруд належать до статично визначу- ваних систем?
8. Що називається ступенем статичної невизначуваності системи?
9. Чому дорівнює ступінь статичної невизначуваності для геомет- рично незмінюваної і статично визначуваної системи?
10. На які сили поділяють внутрішні сили в перерізі стержня?
11. Що називається згинальним моментом, поперечною та поздов- жньою силою у перерізі?

Лекція 5

РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ ФЕРМ

5.1. Конструктивні особливості та класифікація ферм

Фермою називається *стержнева система*, що складається із прямолінійних стержнів, які з'єднуються між собою у вузлах за допомогою наскрізних шарнірів.

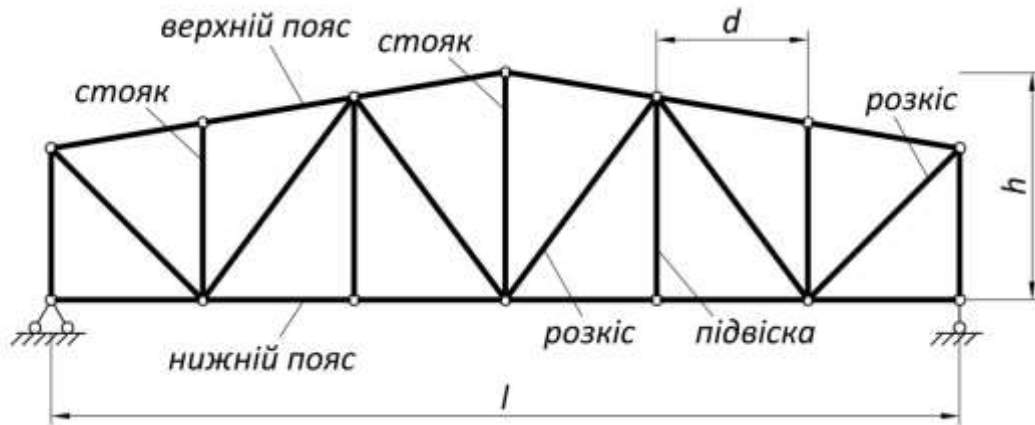


Рис. 5.1

Основні терміни, які прийнято вживати щодо елементів ферми, запозичені з конструкцій кроквяних ферм, що є найпоширенішими у практиці будівництва. Стержні ферми поділяються на **верхній** і **нижній пояси** та **грати**. **Грати** складаються з похилих стержнів – **розкосів** та вертикальних – **стояків**. Розтягнуті стояки іноді називають **підвісками**. **Стояки** та **розкоси**, які розташовані біля опори, називають **опорними**.

Горизонтальна проекція відстані між опорами ферми l називається її **прогоном**. Горизонтальна проекція d відстані між суміжними вузлами верхнього або нижнього поясів називається відповідно верхньою або нижньою **панеллю**. Найбільша відстань h між вузлами верхнього і нижнього поясів називається **висотою ферми**.

Ферми вельми поширені в будівництві. Їх використовують як основну несучу конструкцію в покрівлях промислових і цивільних споруд великого прогону, підкранових балках, залізничних і автодорожніх мостах, потужних кранах тощо. На рис. 5.2. зображено кілька розрахункових схем ферм. З-поміж них за характером опорних закріплень розрізняються: балкові (рис. 5.2, а, в), консольні (рис.

5.2, *з*), консольно-балкові (рис. 5.2, *в*), багатопрогонові консольно-балкові (рис. 5.2, *д*), розпирні (рис. 5.2, *б*) ферми.

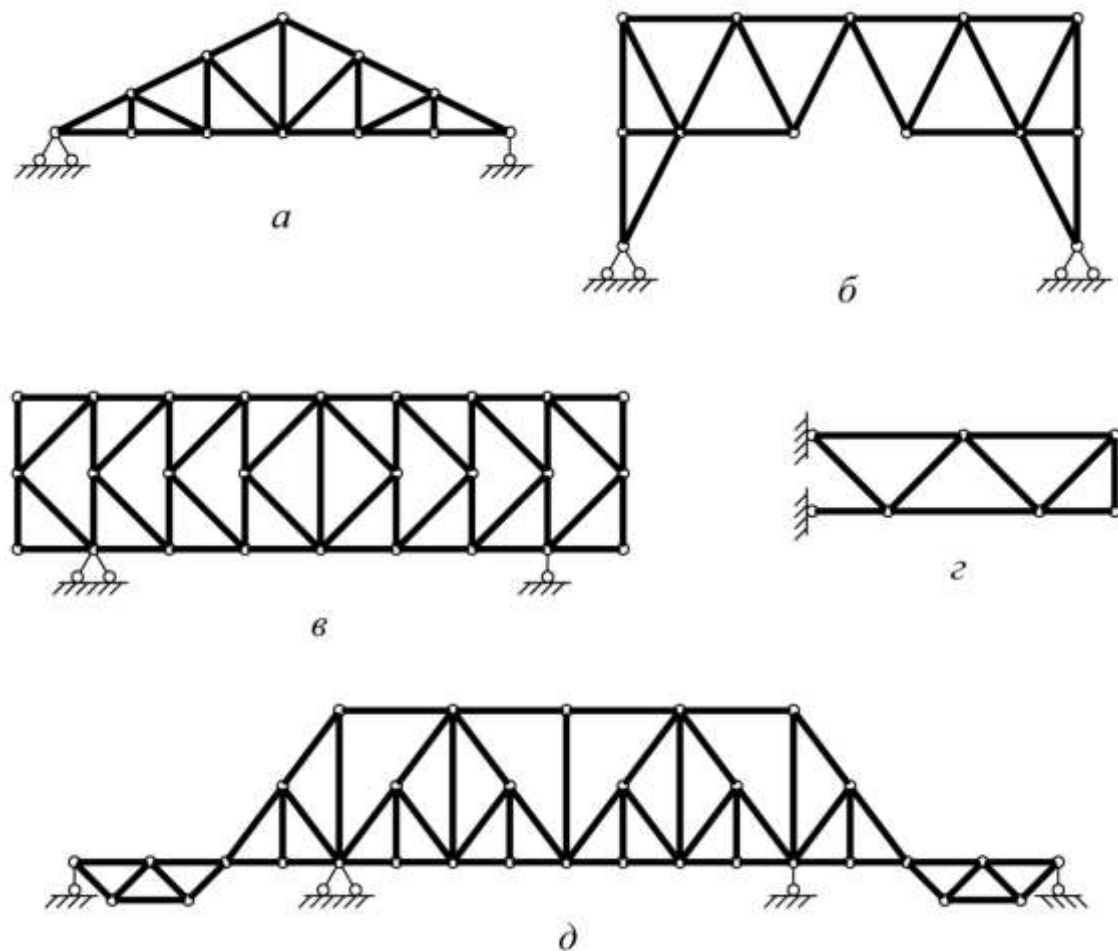


Рис. 5.2

Насправді стержні у вузлах ферм з'єднуються жорстко, за допомогою зварювання, на заклепках або болтах. Але через велику гнучкість стержнів урахування жорсткості їх з'єднання неістотно позначається на розподілі зусиль у стержнях ферми, значною мірою збільшуючи трудомісткість їх розрахунку, оскільки система стає в такому разі статично невизначуваною. Тому в розрахунковій схемі ферми покладають, що в усіх її вузлах встановлені ідеальні наскрізні шарніри, а зовнішні навантаження прикладаються до вузлів.

Якщо на відокремлений від конструкції стержень з двома шарнірами на кінцях не діють зовнішні сили, він перебуває у стані рівноваги під дією двох сил взаємодії з залишеною частиною конструкції. Така система сил може бути зрівноваженою тільки в тому ви-

падку, коли обидві сили розташовані на одній прямій. Отже, на не завантажений стержень ферми діють сили, спрямовані вздовж прямої, що з'єднує її кінці. Таким чином, у прямолінійних стержнях ферми, які не мають місцевого поперечного навантаження, можуть виникати лише поздовжні зусилля. Згинальні моменти та поперечні сили відсутні. Відсутність згину стержнів дає змогу обирати менші розміри їх поперечного перерізу порівняно зі стержнями, що згинаються.

Використовуючи ферму як несучого елемента споруди необхідно застосовувати конструктивні рішення, які передбачають навантаження ферм лише у вузлах, щоб уникнути дії місцевих сил на стержні. Тоді у стержнях виникають тільки поздовжні зусилля, що приводить до істотної економичності ферм порівняно з балками.

5.2. Особливості кінематичного аналізу ферм

Ферма складається з прямолінійних стержнів, які з'єднуються між собою наскрізними шарнірами. Тому, виконуючи кінематичний аналіз стержні ферми можуть розглядатись як *кінематичні в'язі*, а шарнірні вузли – як *вузли в'язей*. Якщо ферма прикріплена до землі, у формулі Чебишова маємо $D=1$. У такому випадку для прикріпленої до землі ферми формула Чебишова має вигляд

$$G = 2B - C. \quad (5.1)$$

Отже, для прикріпленої до землі геометрично незмінюваної статично визначуваної ферми ($G=0$) має місце рівність (5.1), звідки

$$C = 2B, \quad (5.2)$$

де C – загальна кількість стержнів, B – кількість вузлів ферми.

Під час виконання якісного етапу кінематичного аналізу ферми доцільно, прийнявши якийсь її стержень як перший диск, намагатись надалі приєднувати вузли за допомогою способу «діад» і тільки в разі неможливості на якомусь етапі застосувати цей спосіб переходити до інших способів. Означений прийом дає змогу класифікувати статично визначувані ферми за способом їх створення і надалі обирати раціональний шлях їх розрахунку.

Так, ферми, які можна повністю утворити за способом «діад», належать до класу так званих найпростіших. Ферми, укрупнені диски в яких створені за способом «діад» і з'єднуються за способами Полонсо чи Шухова, належать до класів ферм Полонсо чи Шухова відповідно.

Розрахунок ферми полягає у визначенні зусиль в її стержнях. Його можна виконувати *статичним* або *кінематичним методами*.

Визначення зусиль у стержнях ферми статичним методом виконується зазвичай за допомогою модифікацій загального методу перерізів: *способів вирізання вузлів, наскрізних перерізів і сумісних перерізів*. Для деяких типів ферм може бути застосований *метод заміни стержнів*. Крім того існують поширені у минулому графічні методи розрахунку, зокрема побудова діаграми *Максвела-Кремони*.

Вибір способу визначення зусиль має забезпечувати найменшу трудомісткість обчислень.

5.3. Загальний спосіб розрахунку ферм

За цим способом замкненим перерізом вирізається якийсь вузол ферми (рис. 5.3). До відокремленого k -го вузла прикладаються зусилля в розрізаних стержнях, тобто сили N_{ik} взаємодії вузла з решетою ферми, і проекції P_{kx} і P_{ky} на осі x та y зовнішніх зосереджених сил, прикладених в цьому вузлі. Зусилля N_{ik} доцільно спрямовувати в додатному напрямі, щоби вони розтягували стержень, тобто були спрямовані від вузла.

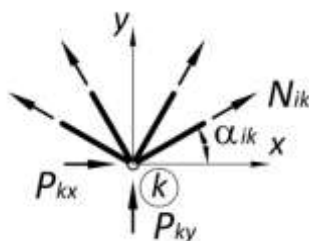


Рис. 5.3

Для прикладеної до вузла збіжної системи сил можна скласти два рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad \sum N_{ik} \cdot \cos \alpha_{ik} + P_{kx} = 0; \\ \sum F_y = 0; \quad \sum N_{ik} \cdot \sin \alpha_{ik} + P_{ky} = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

де α_{ik} – кути між додатними напрямками зусиль в k -му вузлі і осі x , а кількість доданків під знаком суми збігається із кількістю стержнів, що приєднуються до k -го вузла.

Якщо скласти рівняння (5.3) рівноваги всіх B вузлів ферми, до яких поряд із зусиллями в стержнях увійдуть також реакції в опорних пристроях, буде отримано $2 \cdot B$ рівнянь, що дорівнює (5.2) кількості її стержнів S . Таким чином може бути одержана система сумісних лінійних рівнянь, розв'язання якої дає змогу визначити зусилля в стержнях ферми.

5.4. Способи визначення зусиль у стержнях ферми

Розрахунок ферм слід починати із визначення реакцій опор, після чого обчислювати зусилля в стержнях ферми.

Головна задача полягає в уникненні необхідності розв'язувати системи сумісних рівнянь. Цієї мети можна досягти за допомогою традиційних способів розрахунку, вибираючи для кожного стержня найзручніший спосіб.

Спосіб вирізання вузлів

За цим способом замкненим перерізом вирізається вузол ферми. Але на відміну від *загального способу розрахунку* вирізати треба вузол, в якому збігається не більш як два стержні, зусилля в яких ще невідомі (рис. 5.4). Це пов'язано з тим, що прикладені до вузла зусилля в перерізанних стержнях і зовнішня зосереджена сила складають збіжну систему сил, для якої можна скласти два рівняння рівноваги.

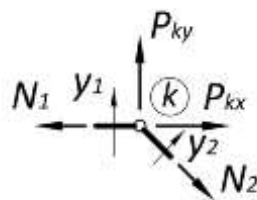


Рис. 5.4

Для того щоби зусилля в кожному з двох стержнів обчислювались з окремих незалежних рівнянь, рівняння рівноваги вузла слід складати у вигляді суми проєкцій на осі, перпендикулярні до іншого стержня з невідомим зусиллям.

Наприклад, для зображеного на рис. 5.4 вузла зусилля N_1 і N_2 можна визначити з рівнянь

$$\sum F_{y_1} = 0; \quad \sum F_{y_2} = 0,$$

де вісь y_1 перпендикулярна до зусилля N_1 , а вісь y_2 – до зусилля N_2 .

Якщо почати визначення зусиль з вузла, в якому з'єднуються тільки два стержні, а потім послідовно переходити до вирізання вузлів, в яких залишились невідомими лише два зусилля, а решту зусиль, що вже визначені під час дослідження попередніх вузлів, прикладати з їх напрямом і величиною, можна обчислити зусилля в усіх стержнях найпростішої ферми.

Так для ферми, представленої на рис. 5.5, а, в першу чергу необхідно знайти опорні реакції V_A , H_A , R_B і прикласти їх до опорних вузлів як зовнішні сили. Нумерація вузлів ферми визначає послідовність вирізання вузлів.

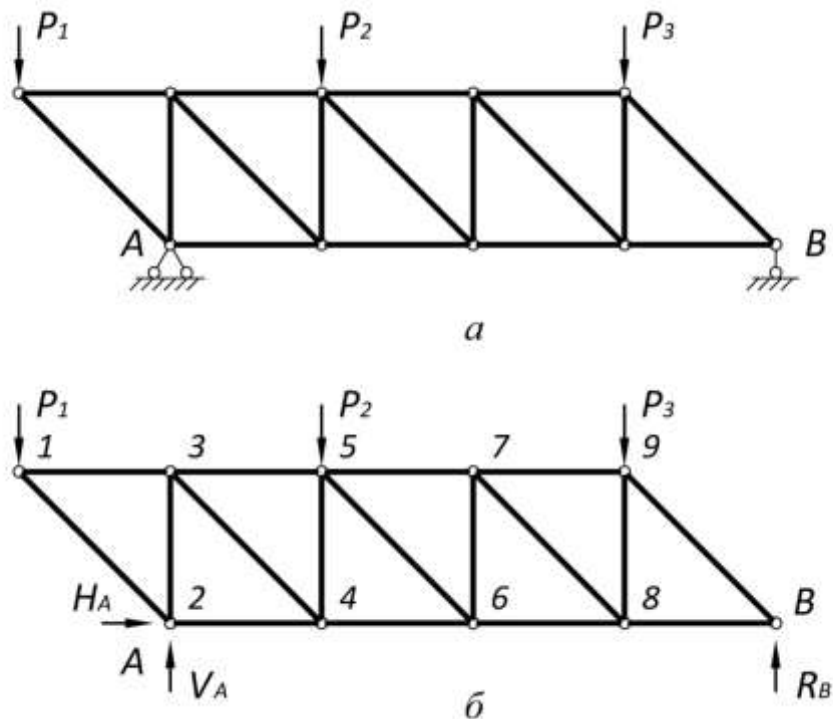


Рис. 5.5

Така послідовність розрахунку може призвести до накопичення помилок і похибок округлення. А відтак спосіб вирізання вузлів доцільно застосовувати для визначення зусиль лише в стержнях двостержневих вузлів та стержнях, які збігаються у вузлах, що належать до так званих *окремих випадків рівноваги вузлів*.

Окремі випадки рівноваги вузлів ферми

1. У незавантаженому вузлі, в якому збігаються два стержня, що не розташовані на одній прямій, зусилля в обох стержнях дорівнюють нулю (рис. 5.6, а).

Насправді, рівняння рівноваги у вигляді суми проекцій на осі, перпендикулярні до кожного з двох стержнів, вміщують лише зусилля в іншому стержні. Тому маємо

$$\sum F_{y_1} = 0; \Rightarrow N_2 = 0;$$

$$\sum F_{y_2} = 0; \Rightarrow N_1 = 0.$$

Стержні, в яких зусилля дорівнюють нулю, називаються *нульовими*.

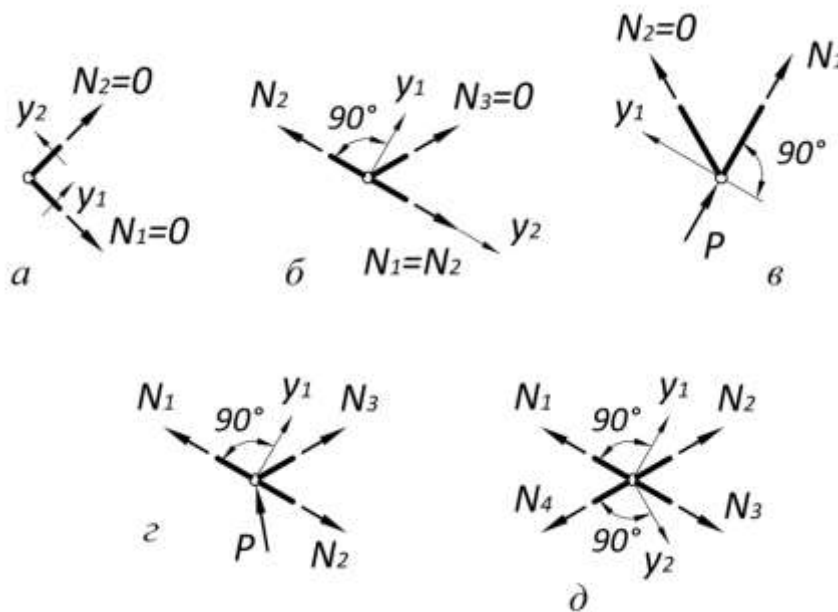


Рис. 5.6

2. У незавантаженому вузлі, в якому збігаються три стержні, два з яких розташовані на одній прямій, зусилля в цих двох стержнях дорівнюють одне одному, а зусилля у третьому стержні дорівнює ну-

лю, означений стержень є **нульовим** (рис. 5.6, б). Це впливає із розв'язання двох рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum F_{y_1} &= 0; \quad \Rightarrow N_3 = 0; \\ \sum F_{y_2} &= 0; \quad \Rightarrow N_1 = N_2.\end{aligned}$$

3. Якщо на вузол, в якому збігаються два стержні, діє зосереджена сила, спрямована вздовж одного з стержнів, зусилля в другому стержні дорівнює нулю (рис. 5.6, в). Отже, цей стержень є **нульовим**. Справді, складаючи рівняння рівноваги у вигляді суми проекцій на вісь, перпендикулярну до сили, маємо:

$$\sum F_{y_1} = 0; \quad \Rightarrow N_2 = 0.$$

4. У завантаженому вузлі, в якому збігаються три стержні, два з яких розташовані на одній прямій (рис. 5.6, г), зусилля в третьому стержні можна визначити з рівняння рівноваги у вигляді суми проекцій на вісь, перпендикулярну до цих двох стержнів:

$$\sum F_{y_1} = 0; \quad \Rightarrow N_3.$$

5. У незавантаженому вузлі, в якому збігаються чотири стержня, які парами розташовані вздовж двох прямих (рис. 5.6, д), зусилля кожній з цих пар стержнів дорівнюють одне одному. Насправді:

$$\begin{aligned}\sum F_{y_1} &= 0; \quad \Rightarrow N_2 = N_4; \\ \sum F_{y_2} &= 0; \quad \Rightarrow N_1 = N_3.\end{aligned}$$

Три перших окремих випадки рівноваги вузлів називають **ознаками нульових стержнів**. Розрахунок ферми доцільно починати з виявлення нульових стержнів, тобто стержнів, зусилля в яких при даному навантаженні дорівнюють нулю, за допомогою ознак нульових стержнів. Це може істотно полегшити подальші обчислення та уникнути деяких помилок. Розглянемо, наприклад, ферму, під дією зовнішніх сил і опорних реакцій (рис. 5.7, а).

Очевидно, що за першою ознакою стержні 7-12 і 6-7, які приєднують вузол 7 до ферми, є нульовими. Нульовим буде й стержень 5-11, який примикає до вузла 11, в якому з'єднуються три стержня,

причому два інші стержня $10-11$ та $11-12$ розташовані на одній прямій (друга ознака). За цією ж ознакою нульовим є стержень $4-10$. Слід звернути увагу, що стержень $4-10$ є нульовим, хоча у вузлі 10 прикладена зосереджена сила. Згадані елементи можна умовно вилучити зі схеми ферми. Результат представлено на рис. 5.7, б.

Аналізуючи схему, бачимо, що за третьою ознакою стержень $5-6$ також є нульовим. Отже, фактично необхідно розраховувати лише ненульові стержні, показані суцільними лініями на рис. 5.7, в.

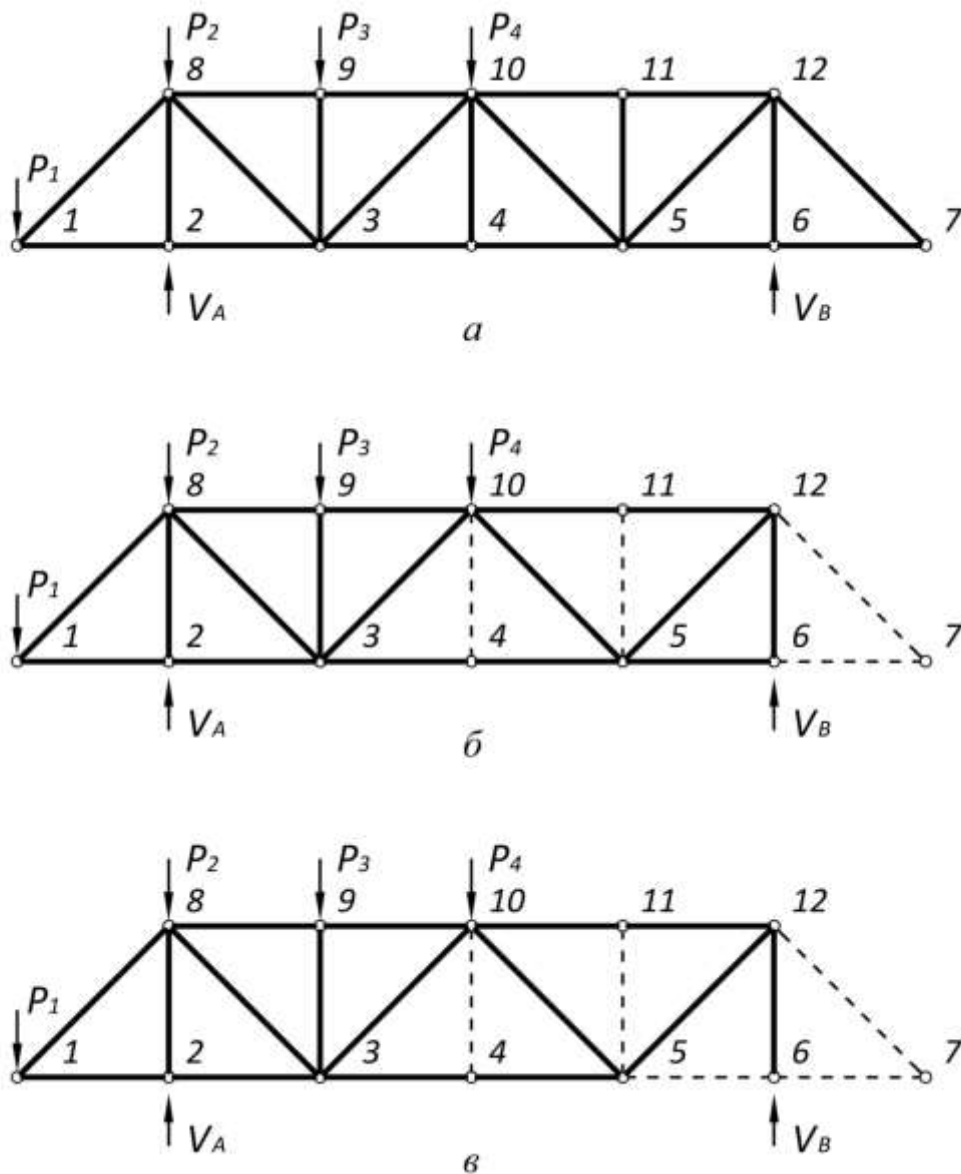


Рис. 5.7

Спосіб наскрізних перерізів

Спосіб наскрізних перерізів полягає в тому, що ферма перетинається наскрізним перерізом, який відокремлює одну частину ферми від іншої. Далі розглядається будь-яка з цих частин, на яку діють безпосередньо прикладені до неї зовнішні сили та зусилля в перерізанних стержнях, що замінюють відкинуту частину ферми. На частину ферми, що розглядається, діє довільна система сил, для якої можна скласти три рівняння рівноваги. Отже наскрізний переріз треба проводити через три стержні, зусилля в яких невідомі.

Для прикладу, перетнувши наскрізним перерізом $1-1$ ферму (рис. 5.8, *a*), розглянемо її праву відокремлену частину (рис. 5.8, *б*). Означену частину розглядати зручніше за ліву, бо на неї діє менша кількість сил. Прикладаємо до неї сили P_3 , R_B і зусилля в перерізанних стержнях N_1 , N_2 і N_3 . Ці невідомі зусилля можуть бути визначені з будь-якої системи рівнянь рівноваги отриманої системи сил.

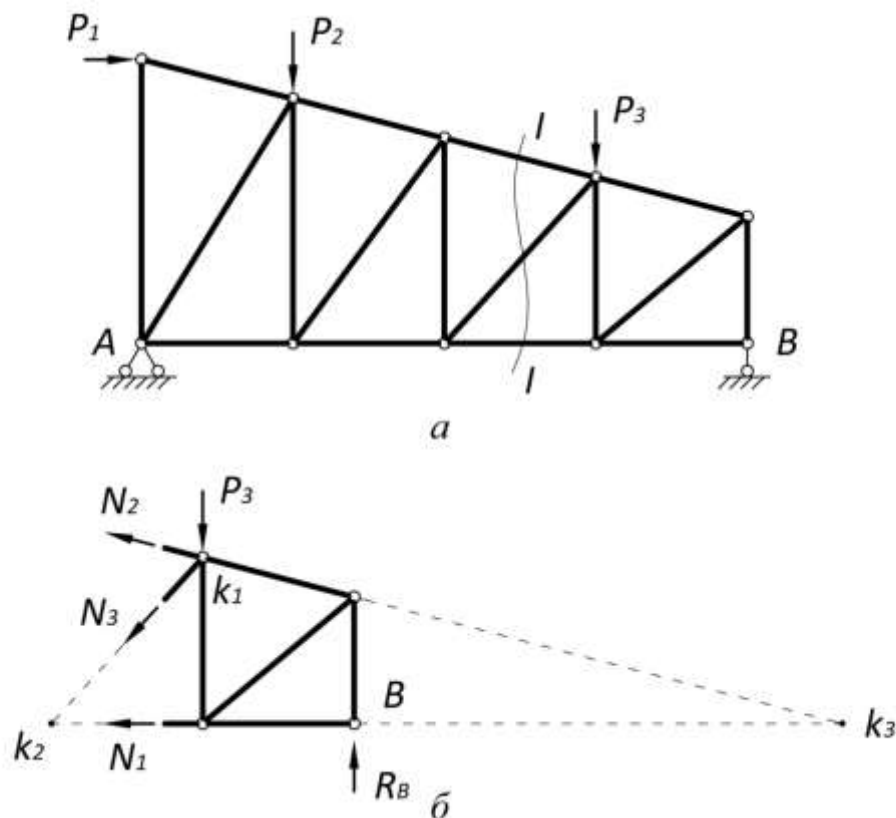


Рис. 5.8

Доцільно складати рівняння рівноваги так, щоби з кожного незалежного рівняння відразу визначалось одне з невідомих. Цієї мети можна досягти, складаючи рівняння рівноваги за *способом мо-*

ментних точок (спосіб Ріттера). Для визначення зусилля у стержні рівняння рівноваги складається у вигляді суми моментів відносно так званої *моментної точки* для цього стержня, яка розташована в точці перетину осей двох інших перерізаних стержнів. Природно, моменти зусиль цих двох стержнів відносно *моментної точки* дорівнюють нулю. Отже, рівняння містить тільки одне невідоме зусилля, яке може бути обчислене зі складеного рівняння.

Так, моментна точка k_1 для визначення зусилля N_1 розташована на перетині зусиль N_2 і N_3 , моментна точка k_2 для визначення зусилля N_2 – на перетині зусиль N_1 і N_3 , моментна точка k_3 для визначення зусилля N_3 – на перетині зусиль N_1 і N_2 . Отже невідомі зусилля N_1 , N_2 і N_3 можна визначити з трьох незалежних рівнянь:

$$\sum M_{k_1} = 0; \quad \Rightarrow N_1;$$

$$\sum M_{k_2} = 0; \quad \Rightarrow N_2;$$

$$\sum M_{k_3} = 0; \quad \Rightarrow N_3.$$

У деяких фермах зустрічаються стержні, для яких при використанні способу наскрізних перерізів моментна точка розташована на нескінченності. Так, якщо розрізати наскрізним перерізом *1-1* ферму (рис. 5.9, *a*) і розглянути рівновагу її лівої відокремленої частини (рис. 5.9, *б*), то для визначення зусилля N_1 моментною буде точка k_1 , для N_2 – точка k_2 . Моментна точка для визначення зусилля N_3 має знаходитись на перетині осей стержнів з зусиллями N_1 і N_2 , тобто в нескінченності, бо ті два стержні паралельні між собою. У такому випадку рівняння рівноваги для визначення зусилля N_3 слід скласти у вигляді суми проєкцій на вісь y , перпендикулярну до двох взаємно паралельних стержнів з зусиллями N_1 і N_2 .

Отже, маємо

$$\sum F_y = 0; \quad \Rightarrow N_3.$$

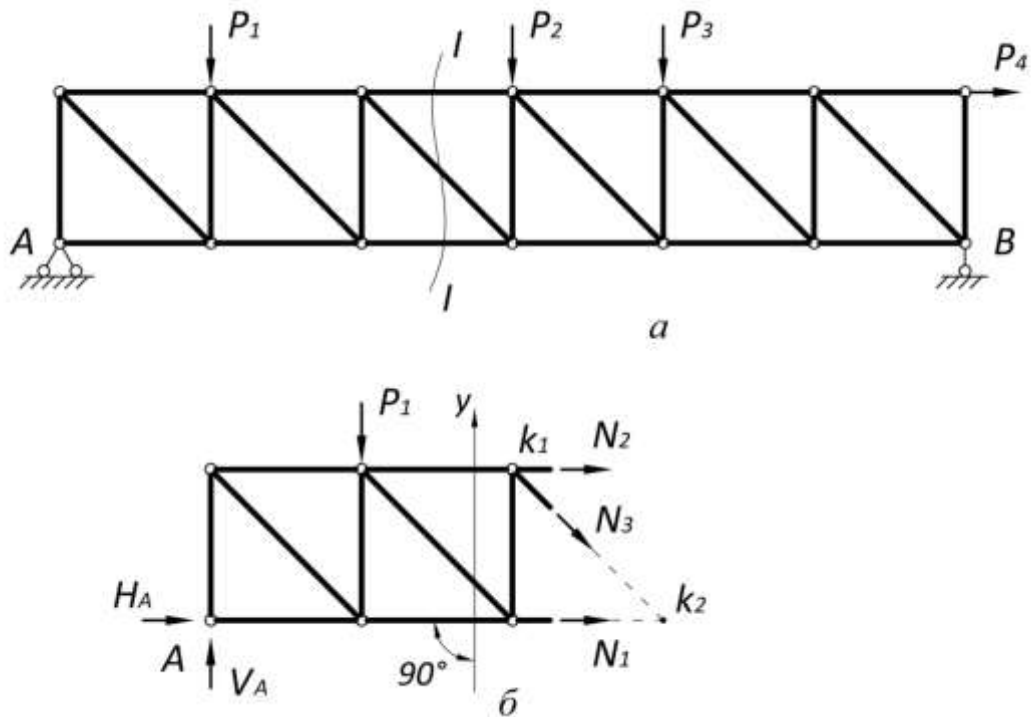


Рис. 5.9

Спосіб сумісних перерізів

Спосіб сумісних перерізів застосовується для визначення зусиль у стержнях, які неможливо обчислити за способами вирізання вузлів і наскрізних перерізів. Так у фермі, представленій на рис. 5.10, в обох вузлах, до яких приєднується середній стояк, збігаються більш ніж два стержні. Отже, у разі вирізання цих вузлів рівнянь рівноваги буде менше, ніж невідомих. Неможливо також провести наскрізний переріз через цей стояк і ще два стержні.

У такому разі спочатку доцільно вирізати верхній вузол ферми, в якому збігаються три стержні (рис. 5.10, б). Складши одне рівняння рівноваги, можна визначити співвідношення між потрібним N_1 та іншим N_2 зусиллями:

$$\sum F_y = 0; \quad \Rightarrow N_1 = f(N_2).$$

Далі треба виконати наскрізний переріз $1-1$ із рівняння рівноваги однієї з відокремлених частин ферми (рис. 5.10, в) обчислити зусилля N_2 :

$$\sum M_{k_2} = 0; \quad \Rightarrow N_2,$$

що дає змогу отримати зусилля N_1 .

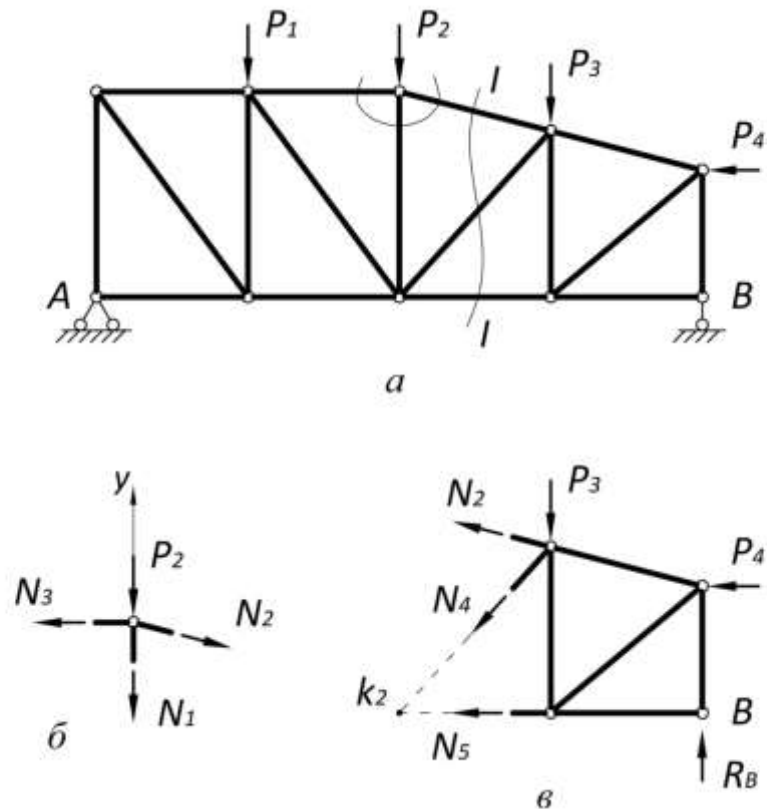


Рис. 5.10

Особливість розрахунку ферм Полонсо

Фермами Полонсо називають ферми, створені з двох найпростіших ферм (тобто одержаних за способом «діад»), які з'єднуються між собою шарніром і стержнем, вісь якого не проходить через центр цього шарніра.

Визначення зусиль у стержнях такої ферми доцільно починати з визначення зусилля в з'єднувальному стержні. Для цього необхідно провести наскрізний переріз через з'єднувальний шарнір і з'єднувальний стержень та скласти рівняння рівноваги однієї з відокремлених частин ферми у вигляді суми моментів відносно з'єднувального шарніра. Надалі ферма зображується без з'єднувального стержня, замість якого до неї прикладаються визначені зусилля. Зусилля у стержнях такої системи можуть бути визначені за викладеними вище способами.

Наприклад, визначення зусиль у фермі Полонсо (рис. 5.11, а) починаємо з виконання перерізу $I-I$. З рівняння рівноваги правої частини ферми (рис. 5.11, в) визначаємо зусилля S у з'єднувальному стержні.

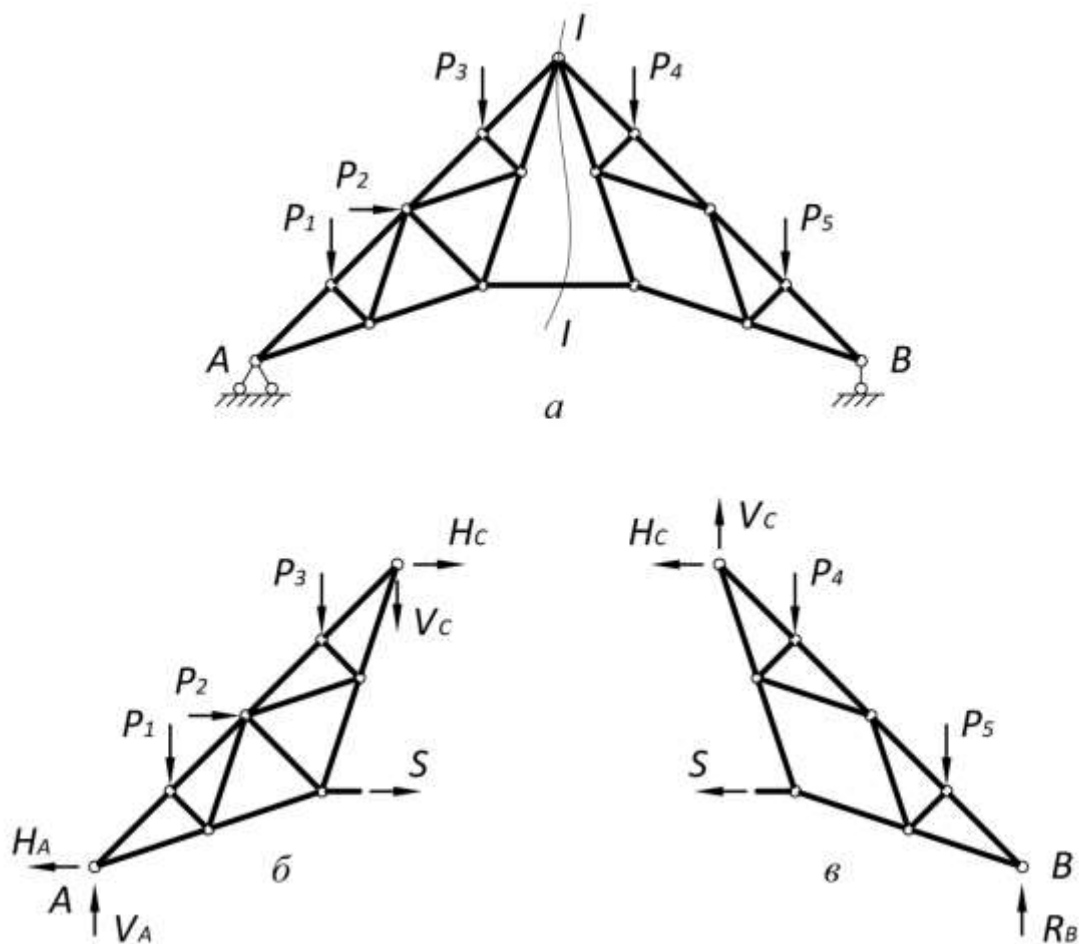


Рис. 5.11

Зусилля в інших стержнях визначаємо розглянутими способами.

Особливість розрахунку ферм Шухова

Фермами Шухова називають ферми, створені з двох або більше найпростіших ферм (тобто одержаних за способом «діад»), які з'єднуються між собою попарно трьома стержнями, що не перетинаються в одній точці і, отже, не паралельні між собою.

Визначення зусиль у стержнях такої ферми доцільно починати із визначення зусиль в з'єднувальних стержнях. Для цього необхідно провести наскрізний переріз, що перетинає три з'єднувальних стержні і скласти рівняння рівноваги однієї з відокремлених частин ферми. Надалі ферма зображується без з'єднувальних стержнів, замість яких до неї прикладаються визначені зусилля. Зусилля у стержнях такої системи можуть бути визначені за викладеними вище способами.

Наприклад, визначення зусиль у фермі Шухова починаємо з виконання замкненого перерізу $l-l$.

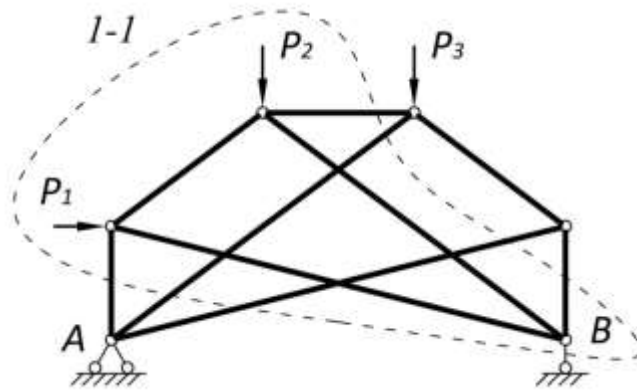


Рис. 5.12

З рівнянь рівноваги відокремленої внутрішньої частини ферми

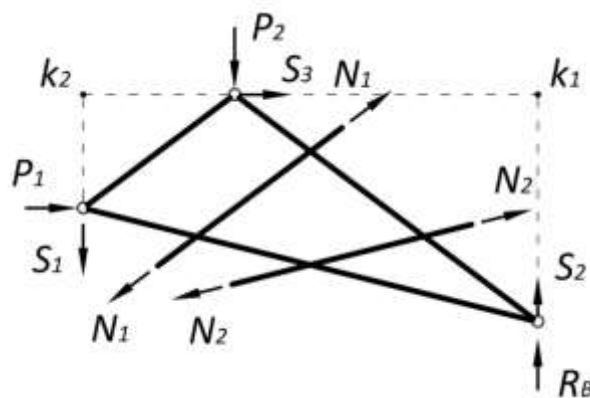


Рис. 5.13

визначаємо зусилля в з'єднувальних стержнях, беручи до уваги, що зусилля N_1 і N_2 в інших стержнях входять у ці рівняння двічі з протилежними знаками і тому взаємно усуваються:

$$\sum M_{k_1} = 0; \Rightarrow S_1;$$

$$\sum M_{k_2} = 0; \Rightarrow S_2;$$

$$\sum F_x = 0; \Rightarrow S_3.$$

Зусилля в інших стержнях встановлюються зі схеми,

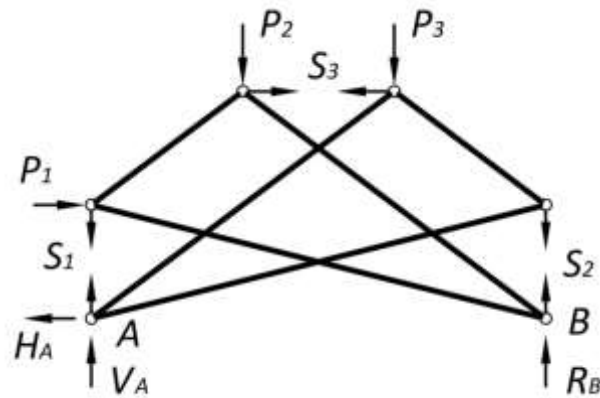


Рис. 5.14

де визначені зусилля S_1 , S_2 і S_3 прикладаються як зовнішні сили.

Контрольні запитання

1. Що називається фермою?
2. Які назви мають стержневі елементи конструкції ферми?
3. Що називають прогоном, панеллю, висотою ферми?
4. Яка особливість кінематичного аналізу ферми?
5. Які Ви знаєте способи визначення зусиль у стержнях ферми?
6. Що називається моментною точкою? В чому полягає спосіб Ріттера?
7. За якими ознаками визначаються нульові стержні ферми?
8. В яких випадках застосовується спосіб сумісних перерізів?
9. Які ферми називають фермами Полонсо?
10. Які ферми називають фермами Шухова?

Лекція 6

РОЗРАХУНОК ШАРНІРНО-КОНСОЛЬНИХ БАЛОК

6.1. Основні теоретичні відомості

Шарнірно-консольними називають статично визначувані багатопрогонові балки.

Кількісний етап кінематичного аналізу *шарнірно-консольних балок* виконується за формулою Чебишова, а аналіз геометричної структури полягає у побудові «*поверхової*» або *монтажної схеми*. Для цього кожен елемент багатопрогонової балки необхідно представити як однопрогонову балку, яка має або одну опору – *затиснення*, або дві *шарнірні опори*, одна з яких *шарнірно-нерухома*, а друга – *шарнірно-рухома*. Кожна з таких однопрогонових балок спирається або на основу, або на інші прості балки. Сукупність простих балок, які спираються одна на одну, створює схему «*поверхів*», в якій всі проміжні шарніри умовно замінюють шарнірно-нерухомими або шарнірно-рухомими опорами і простежують спираєння цих балок одна на одну.

Так, багатопрогонову балку, представлену на рисунку 6.1, *а*, можна розглядати як сукупність трьох однопрогонових балок, що спираються одна на одну (рис. 6.1, *б*).

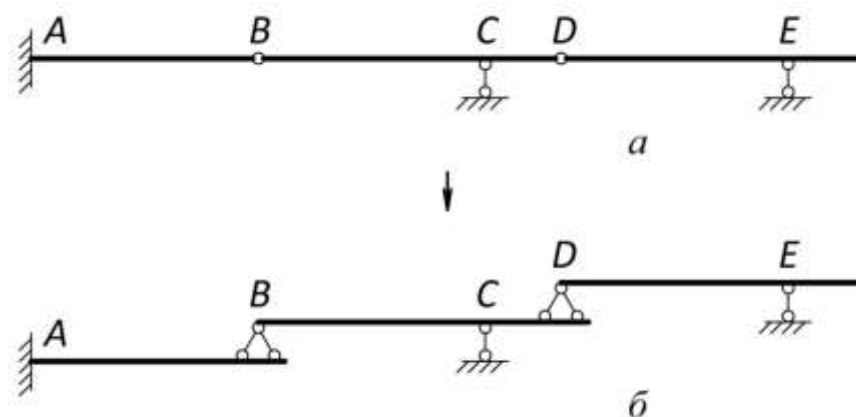


Рис. 6.1

Елемент *AB*, що безпосередньо спирається на основу, розглядається як перший «поверх» шарнірно-консольної балки. Елемент *BСD* становить балку на двох шарнірних опорах *B* і *С*, одна з яких

спирається на перший «поверх» і є другим «поверхом» шарнірно-консольної балки. Нарешті елемент DE спирається на балку другого «поверху» і тому може розглядатись як третій «поверх».

Балку на рис. 6.2, *a*, яка складається з трьох елементів ABC , CD і DEF , можна розглядати як таку, що утворена з трьох однопрогонових балок.

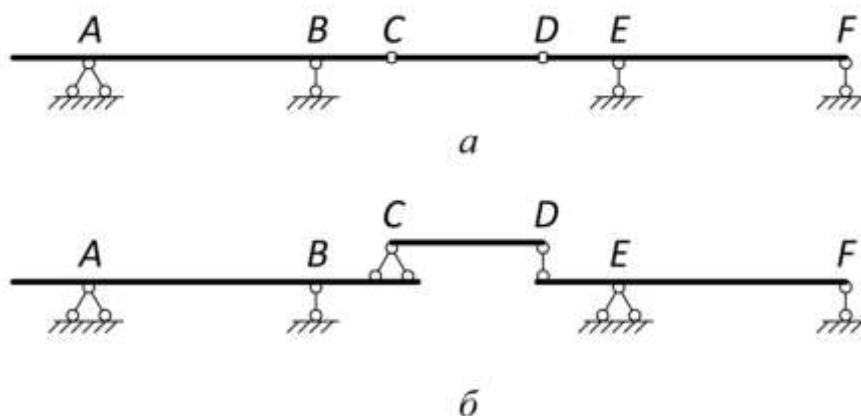


Рис. 6.2

Балки ABC і DEF , які безпосередньо спираються на основу (рис. 6.2, *б*), утворюють перший, а елемент CD – другий «поверх».

6.2. Визначення реакцій в опорних і з'єднувальних пристроях

«Поперхова» (монтажна) схема може бути використана під час статичного розрахунку шарнірно-консольної балки. Опорні реакції визначаються для балки кожного «поверху» окремо, причому розрахунок розпочинається з балки верхнього «поверху». Знайдені опорні реакції прикладаються до балки нижнього «поверху» як відомі зовнішні сили, що дає змогу обчислити реакції опор балки нижнього «поверху».

Так, шарнірно-консольна балка на рис. 6.3, *a*, має два «поверхи». Її «поперхова» схема показана на рис. 6.3, *б*. Визначення реакцій опор необхідно починати з балки другого «поверху» AB . У результаті будуть обчислені реакції опор A і B . Знайдена реакція V_B прикладається до балки першого «поверху» BCD разом з усіма зовнішніми силами як вже відома зовнішня сила, після чого обчислюються реакції опор C і D .

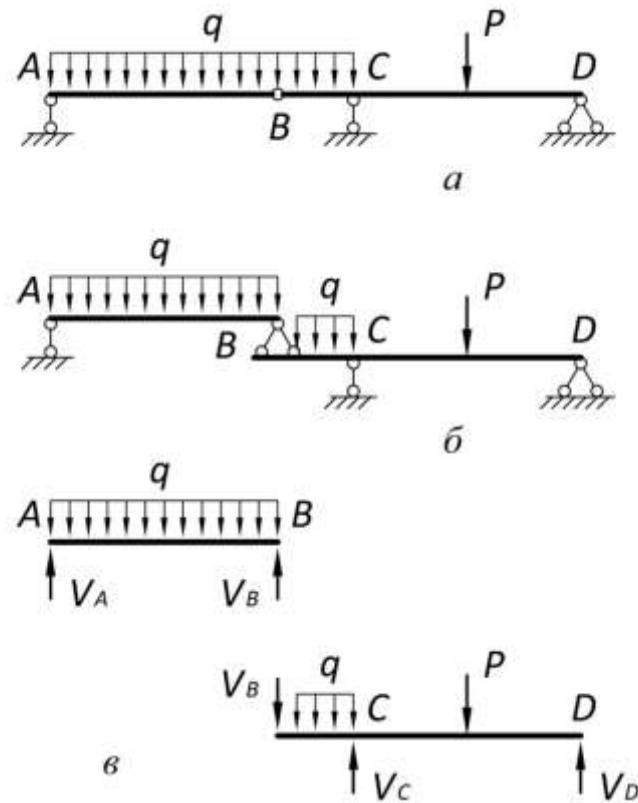


Рис. 6.3

У перерізах шарнірно-консольної балки, що знаходиться під дією зовнішніх вертикальних навантажень, а також згинальних моментів, виникають внутрішні згинальні моменти і поперечні сили, а поздовжні сили завідомо дорівнюють нулю. Розрахунок балки може бути зведений до розрахунку її окремих поверхів: обчислення опорних реакцій і внутрішніх зусиль може здійснюватись для балок кожного «поверху» окремо.

6.3. Визначення внутрішніх зусиль, побудова епюр

Згинальний момент у будь-якому перерізі k обчислюється як алгебраїчна сума моментів усіх сил, що діють на балку відповідного «поверху» по один бік від перерізу, відносно його центру:

$$M_k = \sum M_k^{лів} \text{ або } M_k = \sum M_k^{прав}$$

Якщо сумарний момент однобічних сил зумовлює розтягнення нижніх волокон, то згинальний момент вважається додатним (рис. 6.4).

Поперечна сила у будь-якому перерізі k обчислюється як сума проєкцій на вертикальну вісь сил, що діють на балку відповідного «поверху» по один бік від перерізу:

$$Q_k = \sum F_y^{лів} \text{ або } Q_k = \sum F_y^{прав}$$

Додатною вважається поперечна сила, яка намагається повернути балку відносно перерізу за напрямком руху годинникової стрілки.

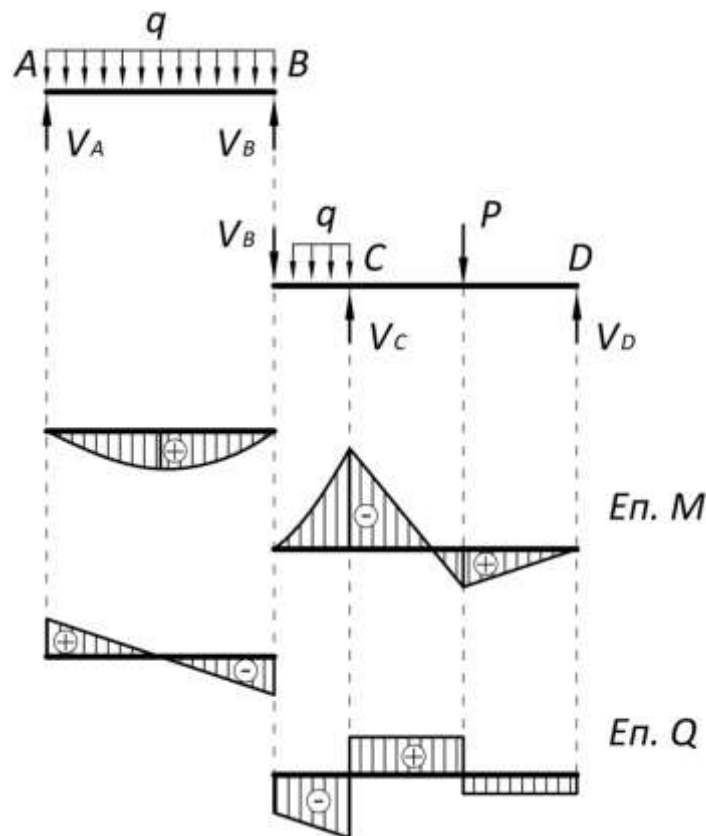


Рис. 6.4

Для побудови еюр внутрішніх зусиль балка відповідного «поверху» поділяється на окремі ділянки, в межах яких зусилля характеризуються неперервними функціями. Границями ділянок беруться точки прикладення зовнішніх зосереджених сил та опорних реакцій, а також перерізи, в яких починається або завершується прикладення розподілених навантажень.

На ділянках, де відсутнє розподілене навантаження, згинальні моменти змінюються за лінійним законом, а поперечні сили – постійні. Тому для побудови еюри згинальних моментів достатньо

обчислити відповідні величини у будь-яких двох перерізах ділянки, а для побудови епюри поперечних сил – лише в одному. На епюрі згинальних моментів додатні величини відкладаються знизу, тобто з боку розтягнутих волокон, а для побудови епюри поперечних сил – зверху. Як правило, зусилля, що визначались для балок окремих «поверхів», креслять на загальній схемі всієї шарнірно-консольної балки.

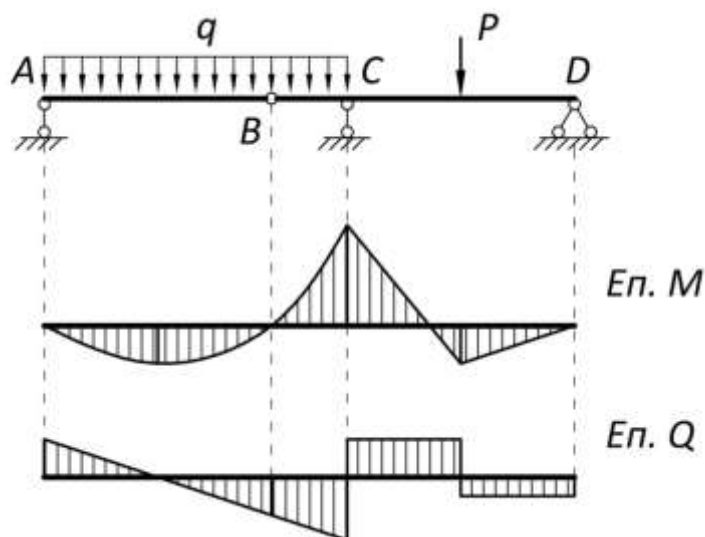


Рис. 6.5

Між згинальними моментами і поперечними силами існує диференціальна залежність $Q = \frac{dM}{dx}$ (теорема Журавського). Виходячи з геометричного змісту похідної, можна сказати, що поперечна сила в перерізі дорівнює тангенсу кута між віссю балки та дотичною до епюри згинальних моментів.

Контрольні запитання

1. Що називають шарнірно-консольною балкою?
2. В чому особливість розрахунку шарнірно-консольної балки?
3. Як складається «поверхова» схема балки?
4. Як визначається кількість «поверхів» монтажної схеми балки?
5. З якого «поверху» та в якій послідовності необхідно починати розрахунок балок окремих «поверхів»?

Лекція 7

РОЗРАХУНОК ТРИШАРНІРНИХ АРОК

Тришарнірною аркою називають плоску геометрично незмінювану систему, що складається з двох кривих стержнів AC та BC , які з'єднуються між собою та основою трьома шарнірами (рис. 7.1).

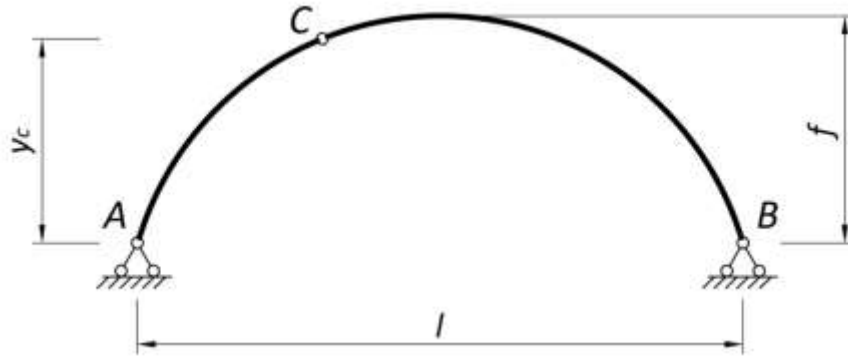


Рис. 7.1

Шарнірно-нерухомі опори тришарнірної арки називають *п'ятами*, шарнір C , що з'єднує між собою напіварки – *ключем*. Відстань між центрами п'ят зветься *прогоном* арки l , вертикальна відстань від центру п'яти до верхньої точки осі арки – *стрілою підйому* f . У переважній більшості випадків ключовий шарнір розташовується в середині прогону, внаслідок чого $y_c=f$. Основною геометричною характеристикою тришарнірної арки є відношення стріли підйому до прогону, тобто f/l .

Найважливіша відміна тришарнірної арки полягає в наявності у шарнірно-нерухомих опорах горизонтальних складових опорних реакцій при вертикальному навантаженні. Ці горизонтальні складові реакції називають *розпором*, а систему, яка у разі вертикального навантаження має розпір – *розпірною системою*.

Наявність розпору може мати негативний вплив на міцність розташованих нижче конструкцій. Тому на практиці часто застосовують арки із *затяжкою*, тобто стержнем, який з'єднує напіварки. Затяжка залежно від архітектурних або технологічних міркувань може бути встановлена на рівні (рис. 7.2, а) чи вище рівня опор (рис. 7.2, б) або мати складну конфігурацію (рис. 7.2, в).

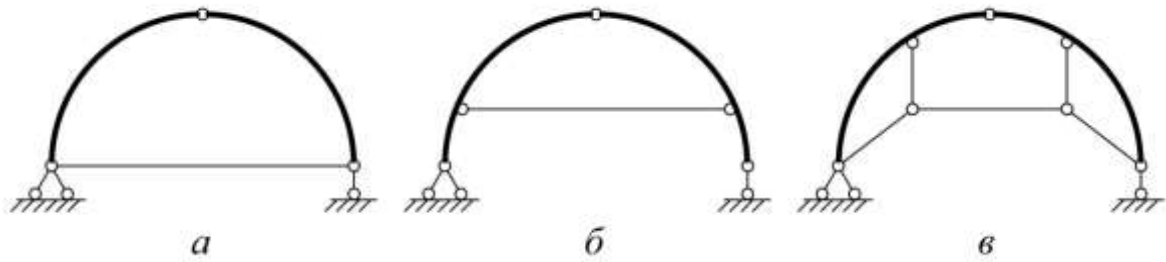


Рис. 7.2

Розпір у таких арках сприймається затяжкою і не передається на опори. За наявності затяжки з міркувань статичної визначуваності конструкції одна опора арки береться шарнірно-нерухомою, друга – шарнірно-рухомою.

Розрахунок тришарнірної арки полягає у визначенні опорних реакцій, зусиль у затяжці та внутрішніх зусиль у перерізах арки.

7.1. Розрахунок арки у разі довільного навантаження

Як вже зазначалось, реакції шарнірно-нерухомих опор A і B тришарнірної арки мають по дві складові – вертикальні V_A і V_B та горизонтальні H_A і H_B .

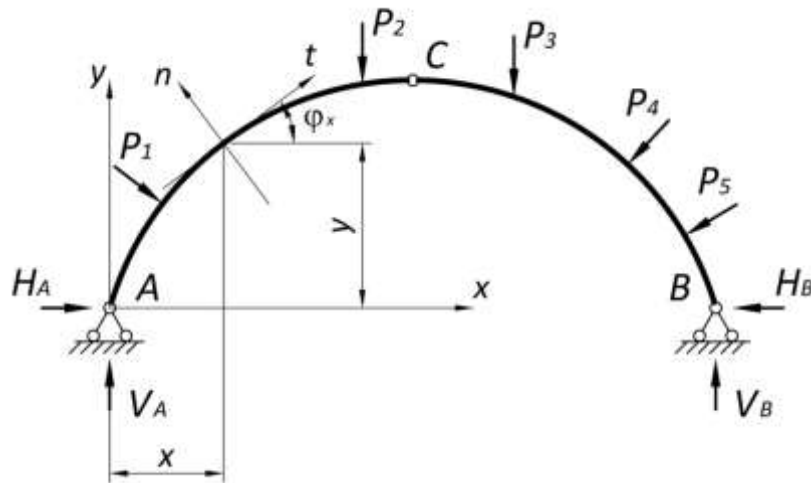


Рис. 7.3

Вертикальні складові опорних реакцій можна встановити з рівнянь рівноваги всієї арки:

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow V_B;$$

$$\sum M_B = 0; \Rightarrow V_A.$$

Для визначення горизонтальних складових опорних реакцій арка перерізається по ключовому шарніру C і складаються рівняння рівноваги лівої та правої частин арки:

$$\begin{aligned}\sum M_c^{лів} &= 0; \quad \Rightarrow H_A; \\ \sum M_c^{прав} &= 0; \quad \Rightarrow H_B.\end{aligned}$$

Обчислені величини складових опорних реакцій можна перевірити, складаючи додаткові рівняння рівноваги для всієї арки:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0.$$

Згинальний момент у перерізі арки обчислюється за загальними правилами як алгебраїчна сума моментів сил, розташованих по один бік від перерізу, відносно центра його ваги. Згинальні моменти вважаються додатними, якщо вони викликають розтягнення нижніх волокон перерізу арки. Для довільного навантаження згинальний момент у перерізі з координатами x, y може бути обчислений за однією з таких формул:

$$\begin{aligned}M_x &= \sum M_x^{лів} = \sum_{i=1}^r Y_i(x - x_i) - \sum_{i=1}^r X_i(y - y_i) + \sum_{j=1}^s \bar{M}_j; \\ M_x &= \sum M_x^{прав} = \sum_{i=m-r+1}^m Y_i(x_i - x) - \sum_{i=m-r+1}^m X_i(y_i - y) - \sum_{j=n-s+1}^n \bar{M}_j,\end{aligned}$$

де X_i, Y_i – проекції на координатні осі OX і OY зовнішніх сил, включно з опорними реакціями і рівнодійними розподілених навантажень; x_i, y_i – координати точок прикладання зовнішніх сил; m – загальна кількість сил, що діють на арку; r – кількість сил, прикладених ліворуч від перерізу; \bar{M}_j – зосереджені моменти (додатні моменти діють у напрямку руху годинникової стрілки); n – загальна кількість прикладених до арки зосереджених моментів; s – кількість моментів, прикладених ліворуч від перерізу.

Поперечна та поздовжня сили в перерізі арки являють собою складові головного вектора одnobічних сил.

Поперечна сила обчислюється як сума проекцій сил, розташова-

них по один бік від перерізу, на нормаль n до осі арки в цьому перерізі. Поперечна сила додатна, якщо вона повертає частину арки, що розглядається, у напрямку руху годинникової стрілки. При довільному навантаженні поперечна сила в перерізі з абсцисою x може бути обчислена за однією з наступних формул:

$$Q_x = \sum F_{nx}^{ліє} = \sum_{i=1}^r Y_i \cos \varphi_x - \sum_{i=1}^r X_i \sin \varphi_x;$$

$$Q_x = \sum F_{nx}^{прає} = - \sum_{i=m-r+1}^m Y_i \cos \varphi_x + \sum_{i=m-r+1}^m X_i \sin \varphi_x,$$

де φ_x – кут між дотичною до осі арки в перерізі з абсцисою x і віссю OX ; інші позначення такі самі, як у попередніх формулах.

Поздовжня сила в перерізі арки обчислюється як сума проєкцій сил, розташованих по один бік від перерізу, на дотичну t до осі арки в цьому перерізі. Поздовжня сила додатна, якщо вона викликає розтягнення перерізу. При довільному навантаженні поздовжня сила в перерізі з абсцисою x може бути обчислена за однією з наступних формул:

$$N_x = \sum F_{tx}^{ліє} = - \sum_{i=1}^r Y_i \sin \varphi_x - \sum_{i=1}^r X_i \cos \varphi_x;$$

$$N_x = \sum F_{tx}^{прає} = \sum_{i=m-r+1}^m Y_i \sin \varphi_x + \sum_{i=m-r+1}^m X_i \cos \varphi_x.$$

Геометричні характеристики арок, які входять у наведені формули, можуть бути визначені з рівняння осі арки. Наведемо рівняння деяких кривих:

- квадратна парабола: $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x)$;
- синусоїда: $y = f \sin \frac{\pi x}{l}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{f\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$;
- коло: $y = f - R(1 - \cos \varphi)$, де $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}$, $\varphi = \arcsin \frac{1}{R} \left(\frac{l}{2} - x \right)$.

7.2. Розрахунок арки під час дії вертикального навантаження

Під час дії на тришарнірну арку вертикальних зосереджених сил і розподілених навантажень та зосереджених моментів (рис. 7.4, а) зовнішні навантаження не мають горизонтальних складових. Тому горизонтальні складові опорних реакцій H_A і H_B дорівнюють одна одній. Їх називають розпором і позначають літерою H .

Для розрахунку такої арки зручно використовувати так звану *еквівалентну балку* (рис. 7.4, б), яка являє собою просту статично визначувану балку на двох опорах, що має однакові з аркою прогін і навантаження.

Неважко помітити, що вертикальні складові опорних реакцій арки дорівнюють реакціям опор еквівалентної балки завдяки ідентичності сум моментів усіх сил відносно їх опорних шарнірів A і B . Отже,

$$V_A=R_A; \quad V_B=R_B.$$

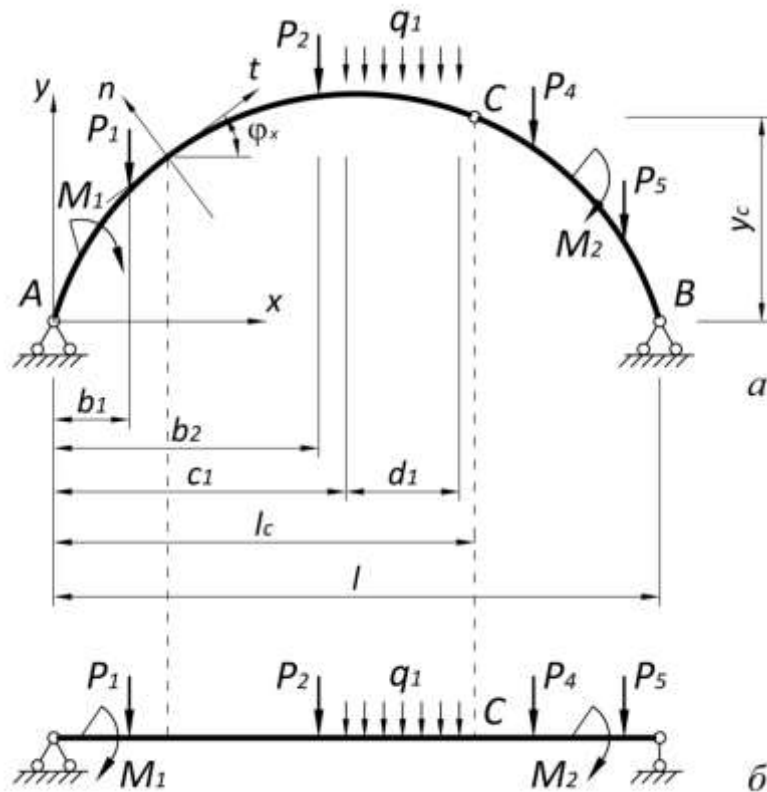


Рис. 7.4

Для визначення розпору складемо рівняння рівноваги лівої частини арки:

$$\sum M_c^{лив} = 0;$$

$$V_A l_c - P_1(l_c - b_1) - P_2(l_c - b_2) - q_1 d_1 \left(l_c - c_1 + \frac{d_1}{2} \right) + M_1 - H y_c = 0.$$

Але згинальний момент у перерізі C еквівалентної балки, розташованому під шарніром C тришарнірної арки, дорівнює

$$M_c^{\bar{o}} = V_A l_c - P_1(l_c - b_1) - P_2(l_c - b_2) - q_1 d_1 \left(l_c - c_1 + \frac{d_1}{2} \right) + M_1.$$

Зрештою можна записати

$$M_c^{\bar{o}} - H y_c = 0,$$

звідки одержимо формулу для визначення розпору тришарнірної арки при дії вертикального навантаження

$$H = \frac{M_c^{\bar{o}}}{y_c}. \quad (7.1)$$

З цієї формули маємо, що величина розпору для визначеного навантаження не залежить від обрису осі арки, вона залежить тільки від взаємного розташування трьох її шарнірів. Крім того, величина розпору обернено пропорційна стрілі підйому арки.

Згинальний момент у перерізі арки з абсцисою x може бути обчислений за формулою

$$M_x = \sum M_x^{лив} = V_A x - P_1(x - b_1) - q_1 d_1 \left(x - c_1 + \frac{d_1}{2} \right) + M_1 - H y_x.$$

Але згинальний момент у перерізі еквівалентної балки з тією самою абсцисою x дорівнює

$$M_x^{\bar{o}} = V_A x - P_1(x - b_1) - q_1 d_1 \left(x - c_1 + \frac{d_1}{2} \right) + M_1.$$

Отже,

$$M_x = M_x^{\bar{o}} - H y_x. \quad (7.2)$$

Поперечна сила у перерізі арки з абсцисою x визначається за формулою

$$Q_x = \sum F_n^{ліг} = (V_A - P_1 - q_1 d_1) \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x.$$

Беручи до уваги величину поперечної сили у відповідному перерізі еквівалентної балки,

$$Q_x^{\bar{o}} = V_A - P_1 - q_1 d_1,$$

маємо

$$Q_x = Q_x^{\bar{o}} \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x. \quad (7.3)$$

Поздовжня сила у перерізі арки з абсцисою x визначається за формулою

$$N_x = \sum F_t^{ліг} = -(V_A - P_1 - q_1 d_1) \sin \varphi_x - H \cos \varphi_x,$$

що, як у попередньому випадку, дає змогу визначити

$$N_x = -(Q_x^{\bar{o}} \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x). \quad (7.4)$$

Із формул (7.1 – 7.4) випливає, що розрахунок тришарнірної арки на вертикальні навантаження доцільно починати визначенням необхідних зусиль у відповідній еквівалентній балці. Епюра кожного з внутрішніх зусиль складається з двох епюр, одна з яких є епюрою згинальних моментів або епюрою поперечних сил з відповідним коефіцієнтом для еквівалентної балки.

Використання формули для визначення M_x дає змогу легко одержати епюру згинальних моментів для арки. Насправді, перший її доданок – епюра $M^{\bar{o}}$ будується для еквівалентної балки, а другий доданок – Hu повторює обрис осі арки. Для отримання епюри M треба відповідно до знаку скласти ці дві епюри. За такої умови внаслідок дорівнювання нулю згинального моменту в ключовому шарнірі C ці дві епюри мають перетинатись під цим шарніром.

Наприклад, для тришарнірної арки (рис. 7.5, *а*) наведено епюру згинальних моментів, побудовану від горизонтальної бази накладенням двох епюр (рис. 7.5, *б*) і (рис. 7.5, *в*).

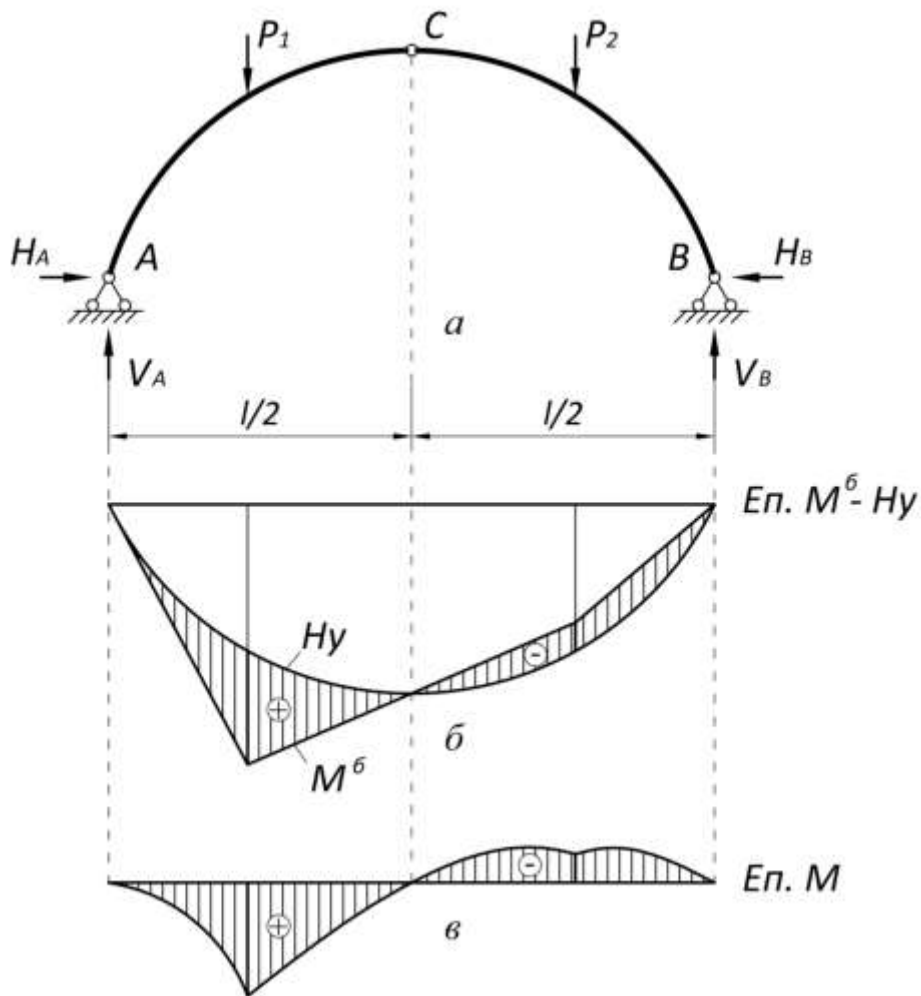


Рис. 7.5

7.3. Розрахунок арки з горизонтальною затяжкою

Під час дії вертикального навантаження в тришарнірній арці із затяжкою виникають лише вертикальні опорні реакції.

Розрахунок тришарнірної арки з горизонтальною затяжкою на рівні опор не відрізняється від розрахунку арки без затяжки, за винятком того, що розпір H замінюється на зусилля в затяжці $H_{зам}$.

Якщо горизонтальна затяжка розташована вище від рівня опор, зусилля в ній визначаються за формулою

$$H_{зам} = \frac{M_c^{\bar{b}}}{y_c - a},$$

де $M_c^{\bar{b}}$ – згинальний момент у перерізі C еквівалентної балки, розташованому під шарніром C тришарнірної арки; y_c – ордината ключового шарніра арки; a – відстань від рівня опор арки до затяжки.

Зусилля в перерізах арки з горизонтальною затяжкою, встановленою вище від рівня опор, визначаються через зусилля в еквівалентній балці залежно від розташування перерізу.

Для перерізів, розташованих нижче від затяжки ($y < a$):

$$M_x = M_x^{\bar{b}}; \quad Q_x = Q_x^{\bar{b}} \cos \varphi_x; \quad N_x = -Q_x^{\bar{b}} \sin \varphi_x.$$

Для перерізів, розташованих вище від затяжки ($y > a$):

$$M_x = M_x^{\bar{b}} - H_{зам}(y - a);$$

$$Q_x = Q_x^{\bar{b}} \cos \varphi_x - H_{зам} \sin \varphi_x;$$

$$N_x = -(Q_x^{\bar{b}} \sin \varphi_x + H_{зам} \cos \varphi_x).$$

Для тришарнірної арки із затяжкою (рис. 7.6, а) наведено епюру згинальних моментів, побудовану накладенням двох епюр (рис. 7.6, б) і від горизонтальної бази (рис. 7.6, в).

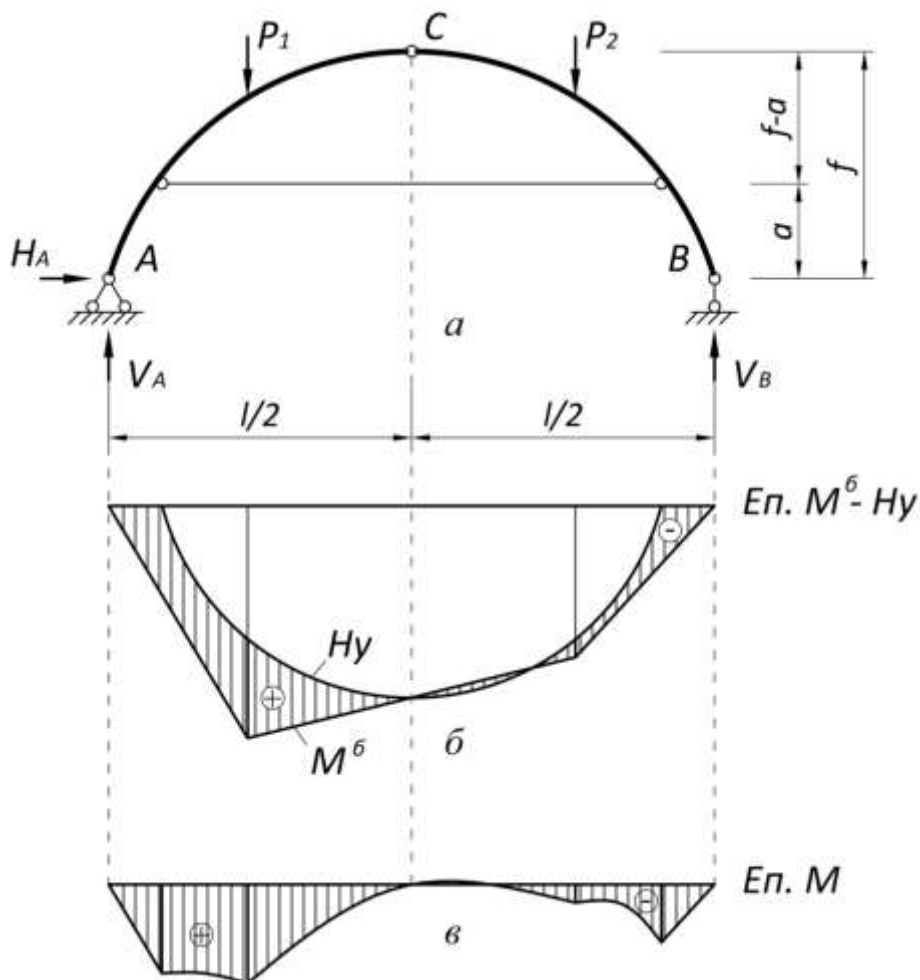


Рис. 7.6

Контрольні запитання

1. Що називають тришарнірною аркою?
2. Що є п'ятами тришарнірної арки?
3. Що називають ключем арки?
4. Що називають прогоном, стрілою підйому тришарнірної арки?
5. Що називають розпором?
6. Що називають розпірною системою?
7. Що називають затяжкою?
8. В чому полягає особливість розрахунку тришарнірної арки під час дії вертикальних навантажень?
9. Що являє собою еквівалентна балка?
10. Як визначається розпір тришарнірної арки під час дії вертикального навантаження?
11. В чому особливість розрахунку арки з горизонтальною затяжкою?

Лекція 8

РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ РАМ

8.1. Класифікація статично визначуваних рам

Рамою називають систему, що складається з прямолінійних стержнів, які поєднуються між собою у вузлах, причому принаймні деякі з вузлів є жорсткими. Вертикальні стержні або такі, що наближаються до вертикальних, називають **стояками**, а горизонтальні або майже горизонтальні – **ригелями**.

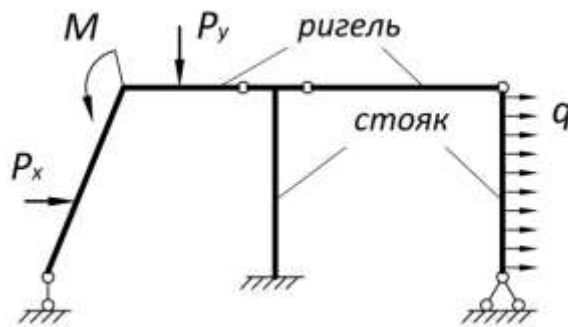


Рис. 8.1

Під час розрахунку рам доцільно розподілити їх за певними ознаками.

Для цього зручно скористатись ознаками кінематичного аналізу. Всю сукупність статично визначуваних плоских рам можна розподілити на *прості* і *складені*. До **простих** можна віднести рами, для яких структурний (якісний) етап кінематичного аналізу здійснюється за один етап, тобто такі, що утворюються з двох або трьох дисків (включаючи диск – «земля»). Виходячи з цього прості рами можливо поділити на три типи: **консольні**, **балкові** і **аркові**.

До консольних рам можна віднести такі, що є приєднанням двох дисків, одним із яких є диск – «земля», за допомогою припайки (рис. 8.2, а).

До балкового типу відносять рами, що утворюються з двох дисків за способом Шухова (рис. 8.2, б) або за способом Полонсо (рис. 8.2, в).

Рами, що утворюються за способом шарнірного трикутника, можуть бути віднесені до аркового типу (рис. 8.2, г).

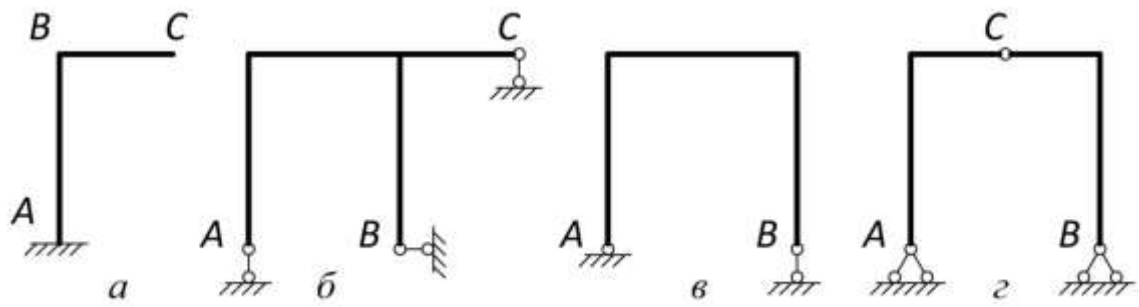
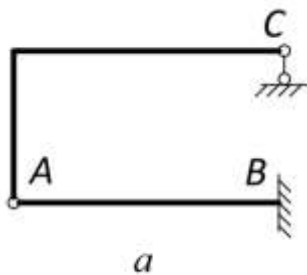


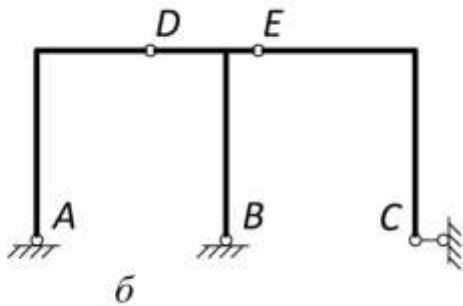
Рис. 8.2

До *складених* можна віднести рами, для яких структурний (якісний) етап кінематичного аналізу здійснюється понад одного етапу. Частина складеної рами, що відповідає одному етапу, умовно називатимемо «поверхом». Отже кожен «поверх» може розглядатись як проста рама, і тому складену раму можна розглядати як сукупність кількох простих рам.



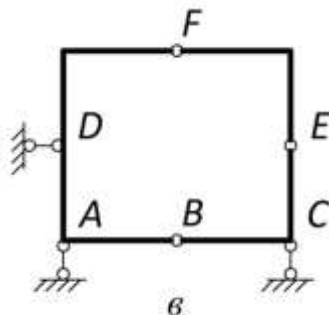
$$\frac{D_{AB} + D_{земля}}{П_B} \Rightarrow D_1,$$

$$\frac{D_{AC} + D_1}{Ш_{A,C_C}} \Rightarrow D_2.$$



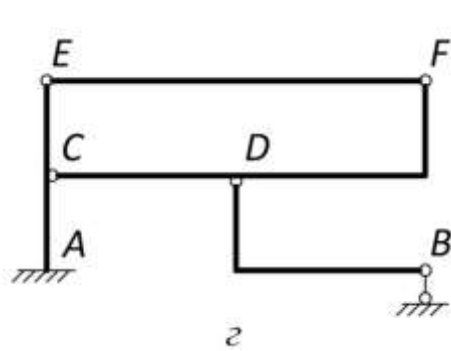
$$\frac{D_{AD} + D_{BDE} + D_{земля}}{Ш_A, Ш_D, Ш_B} \Rightarrow D_1,$$

$$\frac{D_{EC} + D_1}{Ш_E, C_C} \Rightarrow D_2.$$



$$\frac{D_{BADF} + D_{FE} + D_{BCE}}{Ш_B, Ш_E, Ш_F} \Rightarrow D_1,$$

$$\frac{D_{земля} + D_1}{C_A, C_C, C_D} \Rightarrow D_2.$$



$$\frac{D_{AE} + D_{земля}}{P_A} \Rightarrow D_1,$$

$$\frac{D_{EF} + D_{CF} + D_1}{Ш_E, Ш_F, Ш_C} \Rightarrow D_2,$$

$$\frac{D_{BD} + D_2}{Ш_D, C_B} \Rightarrow D_3.$$

Рис. 8.3

8.2. Визначення опорних реакцій

Опорні реакції в рамах визначаються за методом перерізів. За такої умови рама або її частина відокремлюється від опор. Замість розсічених в'язей прикладаються реакції, після чого для відокремленої частини складаються рівняння рівноваги, розв'язок яких визначає величини опорних реакцій. Спосіб складання рівнянь рівноваги залежить від типу рами.

Консольна рама

Для визначення опорних реакцій у рамі консольного типу потрібно провести переріз через припайку A , відокремлюючи раму від «землі».

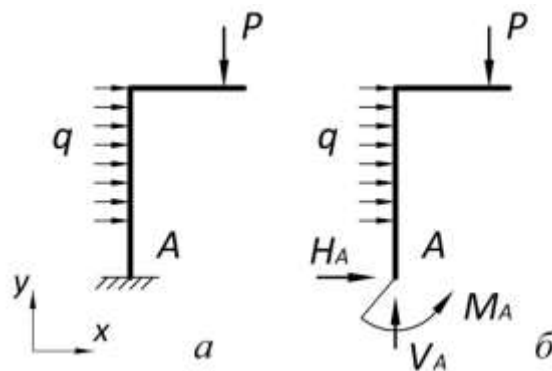


Рис. 8.4

Замість розсіченої припайки прикладаємо її реакції H_A , V_A , M_A , які еквівалентні реакціям опори A і складаємо три рівняння рівноваги:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M_A = 0.$$

Балкова рама

Для визначення опорних реакцій у балковій рамі проводимо переріз через опорні стержні, відділяючи раму від «землі».

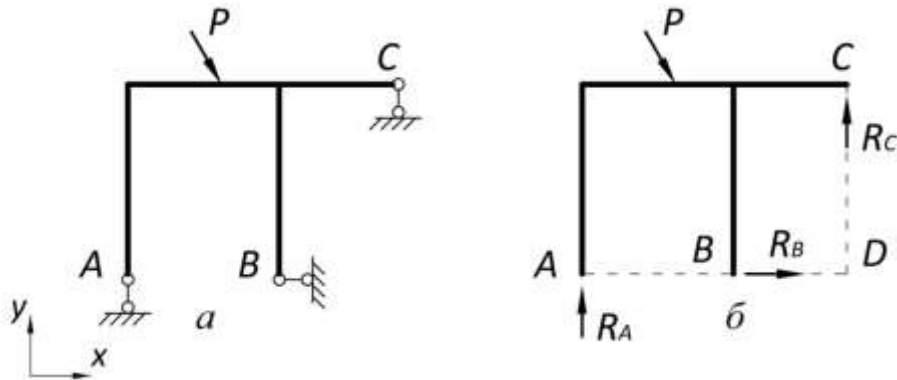


Рис. 8.5

Замість розсічених стержнів прикладаємо реактивні сили R_A , R_B , R_C , після чого можемо скласти такі рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_D = 0; \quad \sum F_x = 0.$$

Аркова рама

Для обчислення опорних реакцій у простій рамі аркового типу необхідно провести переріз через опорні стержні і прикласти реакції розсічених в'язей як зовнішні сили невідомої величини.

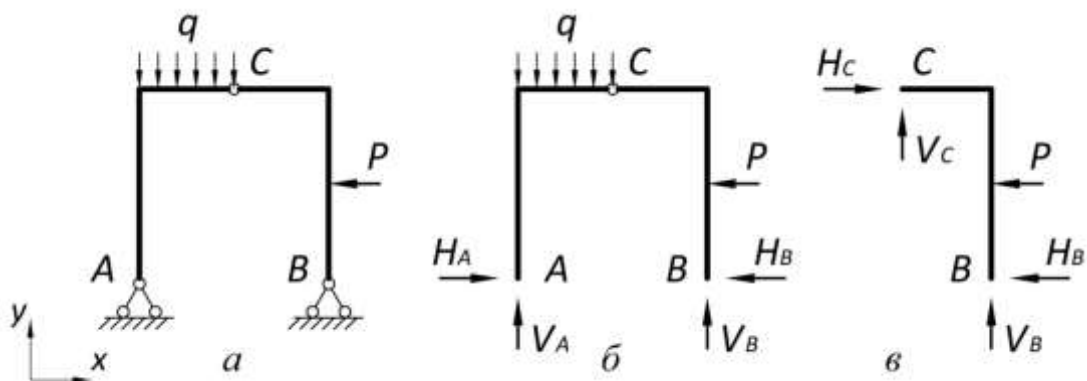


Рис. 8.6

Для визначення вертикальних складових реакцій V_A і V_B можна скласти рівняння моментів

$$\sum M_B = 0; \quad \sum M_A = 0.$$

З рівняння проєкцій $\sum F_x = 0$ дістанемо лише співвідношення між горизонтальними складових реакціями H_A і H_B . Для обчислення числових величин цих реакцій слід провести ще один переріз, який відокремить один із дисків, наприклад диск BC , і скласти рівняння моментів $\sum M_C = 0$, розв'язок якого визначить величину H_B .

Складені рами

Під час розрахунку складених рам необхідно обчислювати не тільки опорні реакції всієї складеної рами, а й опорні реакції рам кожного «поверху». Ці реакції визначаються для кожного «поверху» окремо. Обчислення опорних реакцій слід розпочати з рами найвищого «поверху», після чого можна переходити до наступного нижнього «поверху» тощо. До «поверху», що розраховується, крім заданих зовнішніх навантажень, необхідно прикласти опорні реакції від верхнього поверху як вже відомі зовнішні сили.

Розглянемо процес визначення опорних реакцій на прикладі рами (рис. 8.7, а).

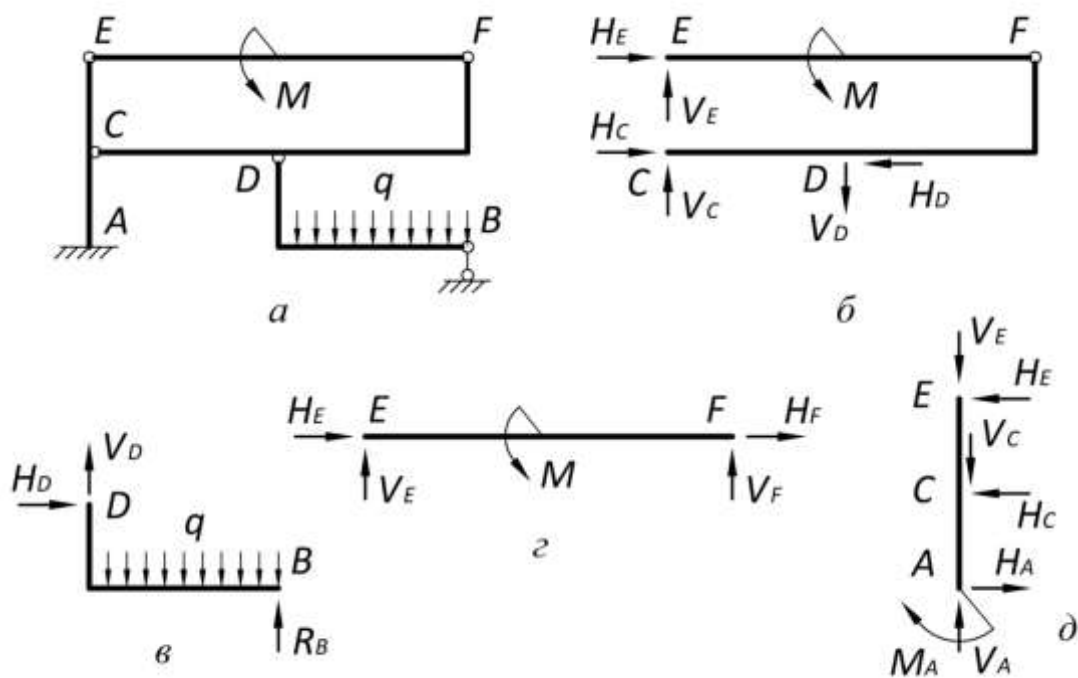


Рис. 8.7

Відокремимо диск BD від заданої рами, розрізавши опорний стержень на шарнірно-рухомій опорі B і шарнір D . Для визначення

опорних реакцій R_B , V_D і H_D можемо скласти три рівняння рівноваги

$$\sum M_D = 0; \quad \sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0.$$

Далі проводимо переріз через шарніри C і E , відокремлюючи просту раму аркового типу EFC .

На цю раму, окрім зовнішнього навантаження (зосереджений момент M) необхідно прикласти опорні реакції верхнього «поверху» V_D , H_D , як відомі зовнішні сили. Потрібно звернути увагу на те, що ці реакції є силами взаємодії між двома поверхами, тому вони мають прикладатися до нижнього «поверху» рами у протилежних напрямках по відношенню до реакцій верхнього «поверху». Для визначення реакцій необхідно скласти рівняння моментів $\sum M_C = 0$, $\sum M_E = 0$ і проєкцій $\sum F_y = 0$. За першими двома рівняннями визначимо величини реакцій H_E і H_C . Третє рівняння містить дві невідомі реакції V_C і V_E . Для обчислення величин цих реакцій доведеться зробити додатковий переріз по шарніру F і розглянути рівновагу одного з дисків, наприклад диска EF (рис. 8.7, з). Склавши рівняння моментів $\sum M_F = 0$ знайдемо величину реакції V_E .

Нарешті розглянемо раму першого «поверху». Відокремлюючи її від «землі» шляхом розрізу припайки A і прикладаючи невідомі реакції припайки H_A , V_A , M_A , а також реакції верхнього поверху V_E , H_E , V_C , H_C , як відомі зовнішні сили (рис. 8.7, д), складаємо три рівняння рівноваги $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_A = 0$, звідки обчислюємо опорні реакції в затисненні A .

8.3. Обчислення внутрішніх зусиль у плоских рамах

Внаслідок дії зовнішніх навантажень в перерізах плоских рам виникають згинальні і поздовжні деформації, а також деформації зсуву. Цим деформаціям відповідають внутрішні зусилля: *згинальні моменти*, *поздовжні й поперечні сили*. Розрахунок рам полягає в обчисленні зусиль і в побудові графіків їх розподілу в стержнях. Означені графіки називають *епюрами* внутрішніх зусиль.

Згинальний момент у перерізі стержня рами обчислюється як сума моментів усіх сил, що прикладені до рами по один бік від пе-

перерізу, відносно центру тяжіння перерізу. Правило обчислення згинального моменту в перерізі стержня рами $k-k$ можна записати у вигляді формули $M_{k-k} = \sum M_{k-k}$, де знак суми поширюється на одну з частин, на які переріз поділяє раму.

У рамах знаки згинальних моментів не визначені. Під час побудови епюри на стержнях рам ординати прийнято відкладати від розтягнених волокон.

Поперечна сила в перерізі $k-k$ стержня рами обчислюється як сума проєкцій усіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на нормаль n до осі стержня в цьому перерізі: $Q_{k-k} = \sum F_{n,k-k}$. За цією формулою підсумовуються всі сили, що прикладені до однієї з частин рами. Поперечна сила вважається додатною, якщо вона намагається повернути відповідну частину стержня відносно перерізу за рухом годинникової стрілки.

Поздовжня сила в перерізі $k-k$ стержня рами обчислюється як сума проєкцій усіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на напрямок t осі стержня в цьому перерізі: $N_{k-k} = \sum F_{t,k-k}$. Тут також беруть до уваги всі сили, які діють на одну з частин рами. Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона розтягує.

Розглянемо обчислення внутрішніх зусиль у довільному перерізі $k-k$ рами (рис. 8.8, *a*). Вважаємо, що всі зовнішні навантаження q , P , M , а також опорні реакції відомі. Переріз $k-k$ поділяє раму на дві частини: ліву (рис. 8.8, *б*) і праву (рис. 8.8, *в*). В обох частинах у місці перерізу $k-k$ прикладено реакції розрізаних в'язей, тобто внутрішні зусилля M_k , Q_k , N_k , причому поперечні і поздовжні сили прикладено в додатному напрямі, а згинальні моменти – в напрямі, який відповідає розтягненню нижнього волокна стержня.

Виходячи з умов рівноваги лівої частини рами, можемо записати:

$$M_k = \sum M_k^{лів} = V_A x - H_A y - qx \cdot x/2,$$

$$Q_k = \sum F_n^{лів} = V_A \cos \beta - H_A \sin \beta - qx \cos \beta,$$

$$N_k = \sum F_t^{лів} = -V_A \sin \beta - H_A \cos \beta + qx \sin \beta.$$

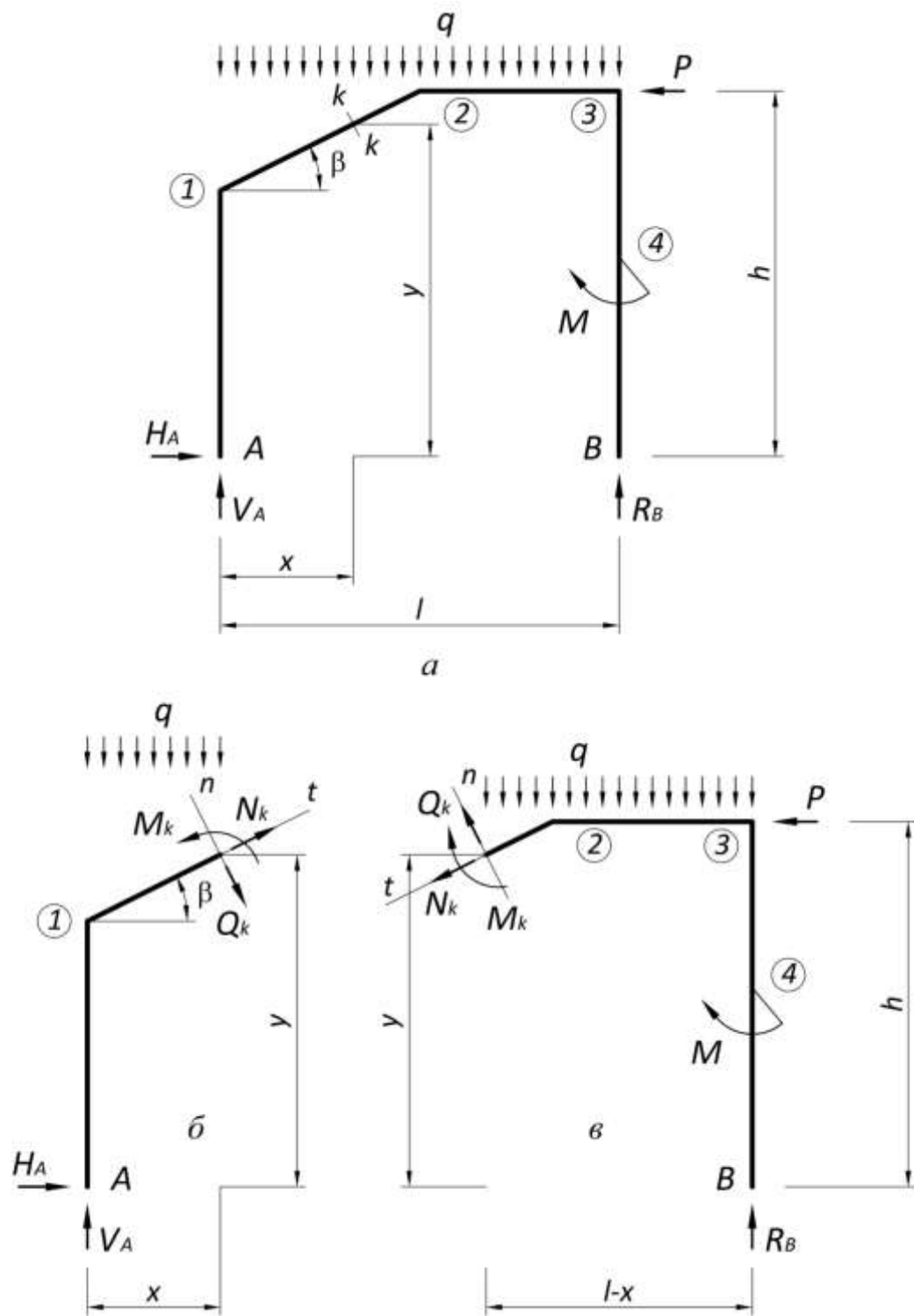


Рис. 8.8

Якщо розглядати рівновагу правої частини, можна записати:

$$M_k = \sum M_k^{права} = R_B(l-x) + P(h-y) - q(l-x) \cdot (l-x)/2 - M,$$

$$Q_k = \sum F_n^{права} = -R_B \cos \beta - P \sin \beta + q(l-x) \cos \beta,$$

$$N_k = \sum F_t^{права} = R_B \sin \beta - P \cos \beta - q(l-x) \sin \beta.$$

Обчислюючи згинальний момент M_k в цьому прикладі доданки вважаються додатними, якщо моменти відповідних силових дій викликають розтягування в нижніх волокнах.

Необхідно усвідомлювати, що у випадку, коли опорні реакції задовольняють умовам рівноваги, внутрішні зусилля, обчислені із розгляду лівої (рис. 8.8, б) і правої (рис. 8.8, в) частин рами, матимуть ті ж самі величини. На цій підставі під час виконання практичних розрахунків слід розглядати ту частину рами, на яку діє менша кількість зовнішніх сил, тобто ту, для якої простіше виконувати обчислення.

Зазначений спосіб визначення внутрішніх зусиль застосовується під час розрахунку простих рам. Такий підхід дає можливість іноді, але не завжди, обчислити зусилля і для деяких складених рам. Загальний спосіб розрахунку полягає в розкладі складених рам на окремі «поверхи». В такому разі розрахунки внутрішніх зусиль виконуються для кожного «поверху» окремо.

Під час побудови епюр виникає необхідність обчислювати зусилля у великій кількості перерізів.

Істотне скорочення перерізів може бути одержано за рахунок використання правил побудови епюр у стержнях, відомих з курсу опору матеріалів:

- Якщо на ділянці стержня відсутнє будь-яке зовнішнє навантаження, то епюра згинальних моментів змінюється за лінійним законом, а поперечні і поздовжні сили є постійними. Тому для побудови епюри M достатньо обчислити згинальні моменти в двох перерізах ділянки, а для побудови епюр Q і N – величини поперечних і поздовжніх сил лише в одному перерізі.
- Якщо на ділянці стержня розташоване зовнішнє розподілене навантаження, то згинальні моменти змінюються за нелінійним законом (у випадку, коли навантаження розподілене рівномірно – за законом квадратної параболи), і тому для побудови епюри M необхідно обчислити згинальні моменти принаймні в трьох перерізах ділянки. Епюри Q і N під час дії рівномірно розподіленого навантаження змінюються за лінійним законом, і тому

необхідно обчислювати відповідні величини у двох перерізах. Якщо ж навантаження розподілене нерівномірно, то величини Q і N змінюються за нелінійним законом і для побудови їх епюр необхідно обчислювати відповідні величини не менш ніж у трьох перерізах ділянки.

Отже, для побудови епюр необхідно насамперед розбити раму на окремі ділянки. Межами ділянок можуть бути:

- місця поєднання двох або більше стержнів;
- перерізи, в яких прикладено зовнішні зосереджені сили або моменти;
- місця початку і закінчення розподілених навантажень.

Контрольні запитання

1. Що називають рамою?
2. Як називають конструктивні стержневі елементи рам?
3. Які рами відносяться до простих?
4. На які типи поділяються прості рами?
5. Які рами відносяться до складених?
6. Як здійснюється визначення опорних реакцій рам різних типів?
7. Яка послідовність обчислення опорних реакцій складених рам?
8. Як обчислюється згинальний момент у перерізі стержня рами?
9. Як обчислюється поперечна сила у перерізі стержня рами?
10. Як обчислюється поздовжня сила у перерізі стержня рами?
11. Які правила використовуються під час побудови епюр у стержнях рами?

Лекція 9

ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ В СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМАХ

Під впливом зовнішніх дій і навантажень споруди деформуються. Водночас координати, що характеризують положення кожного перерізу, змінюються, тобто перерізи переміщуються. Визначення цих переміщень – завдання теорії переміщень.

Обчислення переміщень необхідно:

- для розрахунку споруд на жорсткість, коли визначаються найбільші переміщення перерізів споруди f_{\max} і порівнюються з переміщеннями, які припускаються, тобто перевіряється умова $f_{\max} < [f]$;
- для розрахунку статично невизначуваних систем під час складання рівнянь сумісності деформацій елементів споруди.

9.1. Робота зовнішніх і внутрішніх сил

Якщо до споруди прикладена певна сила, яка в процесі навантаження зростає від нуля до кінцевої величини з порівняно невеликою швидкістю (таке навантаження називається статичним), споруда деформується, точки, в яких прикладені навантаження, переміщуються і сили здійснюють роботу.

Розглянемо статичне завантаження стержня (рис. 9.1, а), який внаслідок дії сили P , що викликає розтяг, дістає подовження Δl . Якщо матеріал стержня є фізично-нелінійним, графік залежності між навантаженням і переміщенням кінця стержня буде криволінійним (рис. 9.1, б).

Для обчислення роботи, яку виконала сила P , візьмемо переміщення u в довільний момент часу і надамо йому приріст du . Тоді робота сили P виражається інтегралом

$$A_p = \int_0^{\Delta l} p du$$

і являє собою площу між кривою і віссю u , яка на графіку (рис. 9.1, б) заштрихована вертикальною штриховкою. Таку роботу називають *дійсною*.

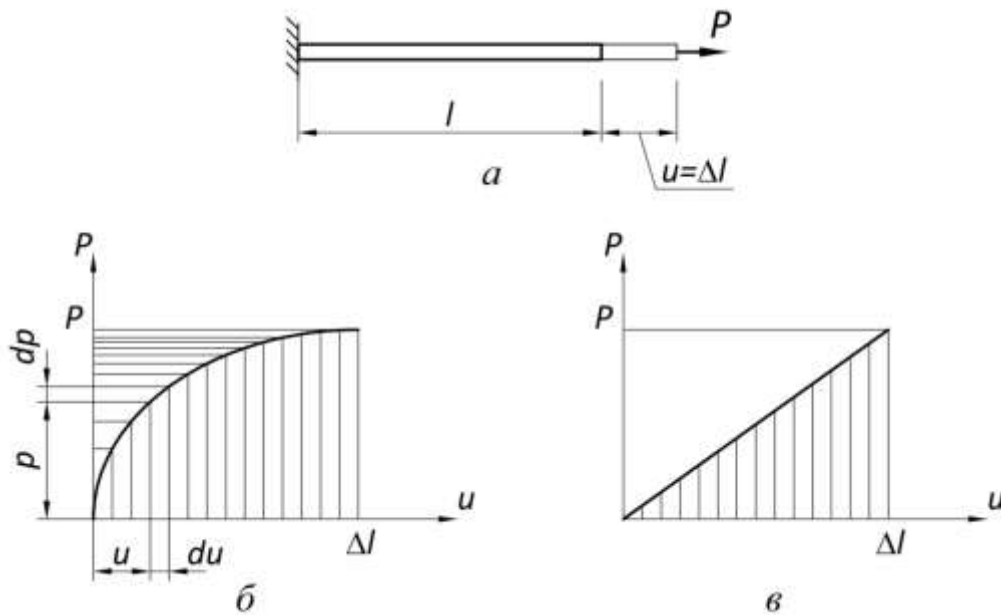


Рис. 9.1

Якщо ж надати приріст не переміщенню, а навантаженню, то робота виражатиметься інтегралом

$$A_u = \int_0^P u dp .$$

Таку роботу називають *додатковою*. На графіку (рис. 9.1, б) площа, що відповідає додатковій роботі, позначена горизонтальною штриховкою.

Сума дійсної і додаткової роботи називається *повною роботою* зовнішніх сил:

$$A_{\Pi} = A_p + A_u .$$

Очевидно, що повній роботі відповідає площа прямокутника.

Для лінійно деформованих систем між навантаженням і переміщенням, що їм зумовлене, існує лінійна залежність (рис. 9.1, в). Дійсна робота зображується площею заштрихованого трикутника. Очевидно, що додаткова робота в такому разі дорівнює дійсній роботі:

$$A_p = A_u = A$$

і може бути обчислена як площа трикутника

$$A = \frac{P \cdot \Delta l}{2}.$$

Означена рівність називається **теоремою Клапейрона**: в лінійно-деформованих системах дійсна робота статично прикладеної сили дорівнює половині добутку кінцевої величини сили на відповідне кінцеве переміщення, зумовлене цією силою.

Отже, робота сили на зумовлених цією силою переміщеннях називається дійсною. Якщо ж сила P , залишаючись незмінною, здійснює роботу на переміщеннях Δl , зумовлених іншими діями, то таку роботу називають **можливою**. Можлива робота дорівнює добутку величини сили на відповідне переміщення, яке зумовлене іншими силами:

$$A = P \cdot \Delta l.$$

Для обчислення роботи внутрішніх сил відокремимо нескінченно малий елемент довжиною dx .

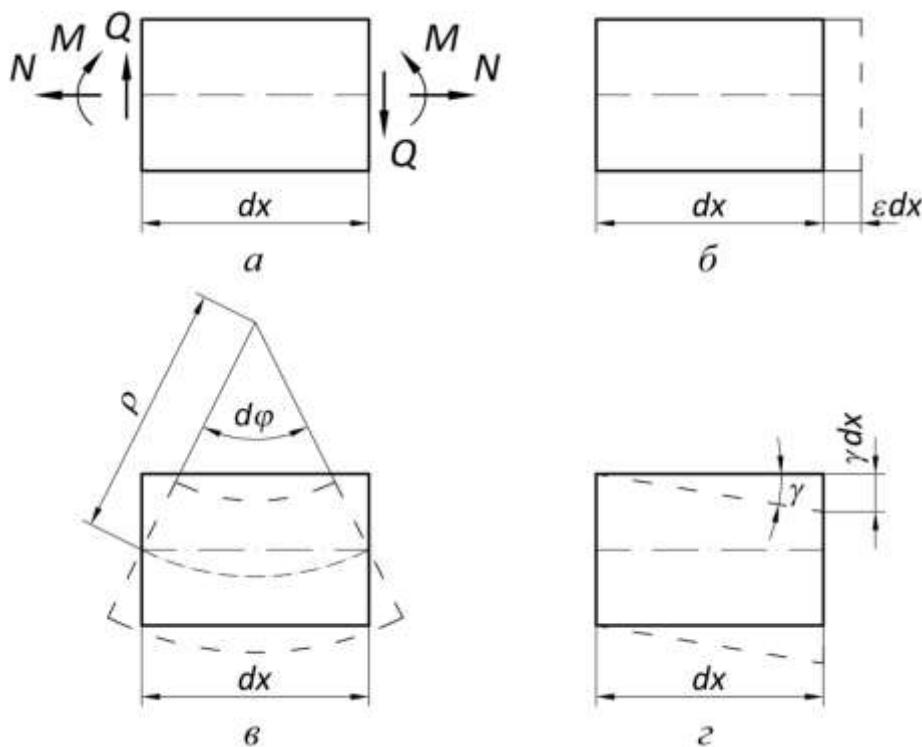


Рис. 9.2

На рис. 9.2, *a* зображено внутрішні зусилля, які діють у перерізах елемента. Сили N , M , Q здійснюватимуть роботу відповідно на поздовжніх деформаціях, взаємних кутах повороту і зсуву перерізів. Ці деформації зображено на рис. 9.2, *b* – 9.2, *г*. Поздовжня деформація становить εdx , де ε – відносна поздовжня деформація ($\varepsilon = \Delta l / l$); взаємний кут повороту $d\varphi = \kappa dx$ ($\kappa = 1/\rho$ – кривизна осі деформованого стержня); поперечна деформація – γdx , де γ – кут зсуву.

Дійсна робота внутрішніх сил становитиме

$$U = -\frac{1}{2} \sum_l \int (N\varepsilon dx + M\kappa dx + Q\gamma dx). \quad (9.1)$$

Аналогічно можна записати можливу роботу внутрішніх сил одного стану i на переміщеннях іншого стану p :

$$U_{ip} = -\sum_l \int (N_i \varepsilon_p dx + M_i \kappa_p dx + Q_i \gamma_p dx). \quad (9.2)$$

У цих формулах підсумовування поширюється на всі стержні системи. Знак «мінус» поставлено тому, що внутрішні сили стержневої системи N , M , Q для нескінченно малого елемента, який вилучено із стержневої системи, є зовнішніми. Внутрішні ж сили в елементі матимуть таку саму величину, але спрямовуються у зворотному напрямку.

9.2. Узагальнені сили та узагальнені переміщення

З погляду проблем, що вивчаються будівельною механікою, всі переміщення (поступальні переміщення точок споруди, кути повороту перерізів в елементах, взаємні поступальні і кутові переміщення перерізів тощо) мають одні й ті самі властивості. Тому зазвичай будь-яке переміщення, незалежно від його характеру або від причин, що його зумовлюють, називають **узагальненим переміщенням**, тобто переміщенням у загальному розумінні цього слова.

Кожному переміщенню ставлять у відповідність певну силову дію, яка здійснює роботу на цьому переміщенні. Така силова дія називається **узагальненою силою**, тобто силовою дією в загальному

сенсі слова. Різним узагальненим переміщенням відповідають різні за характером та напрямком узагальнені сили.

Розглянемо кілька прикладів узагальнених переміщень і відповідних їм узагальнених сил.

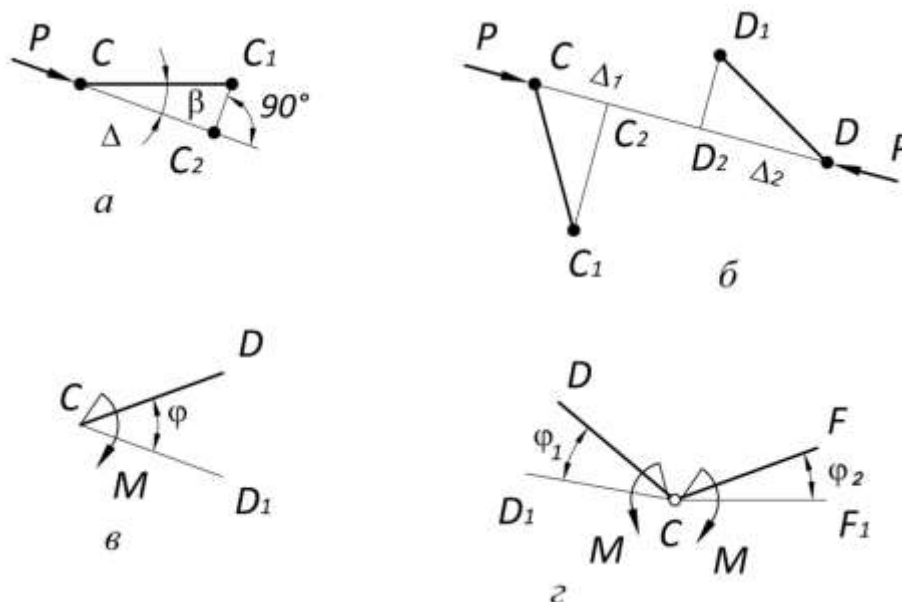


Рис. 9.3

1. Внаслідок деформації споруди точка C переміститься в положення C_1 (рис. 9.3, а). Робота сили P , яка може бути прикладена в цій точці, виразиться співвідношенням $A = P\Delta$, де Δ – відрізок CC_2 , який є проекцією повного переміщення CC_1 на напрям дії сили. Отже, зосередженій силі, яка прикладена в точці, відповідає поступальне переміщення цієї точки в напрямі сили.

2. Внаслідок деформацій споруди точки C і D перемістяться в положення C_1 і D_1 відповідно (рис. 9.3, б). Робота двох сил P , які можуть бути прикладені в цих точках і спрямовані назустріч одна одній, буде виражена співвідношенням

$$A = P\Delta_1 + P\Delta_2 = P(\Delta_1 + \Delta_2).$$

Отже, двом однаковим за величиною силам, що спрямовані вздовж однієї прямої назустріч одна одній, відповідає узагальнене переміщення, що характеризує зміну відстані між точками, в яких вони прикладені.

3. Внаслідок деформації споруди переріз C стержня повернеться на кут φ (рис. 9.3, в). Водночас зосереджений момент M , який може бути прикладений в цьому перерізі, здійснить роботу $A = M\varphi$.

Отже, зосередженому моменту відповідає кут повороту перерізу стержня в точці прикладення моменту.

4. У шарнірі C поєднуються два стержні. У процесі деформації один із стержнів повернеться на кут φ_1 , а другий – на кут φ_2 (рис. 9.3, з). Два однакових за величиною і протилежно спрямованих зосереджених моменти M , які можуть бути прикладені до кожного із стержнів, водночас здійснюють роботу

$$A = M\varphi_1 + M\varphi_2 = M(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Як підсумок, двом однаковим за величиною і протилежним за напрямком зосередженим моментам відповідає зміна кута поміж перерізами, в яких ці моменти прикладені.

Будь-яке узагальнене переміщення позначається літерою Δ , якщо воно зумовлене зовнішньою дією довільної величини, або літерою δ , якщо величина дії дорівнює одиниці. В позначення вводиться два індекси, наприклад

$$\Delta_{ip}, \delta_{ij},$$

де Δ_{ip} – узагальнене переміщення в напрямку дії узагальненої одиничної сили стану i , зумовлене зовнішньою дією довільної величини стану P .

δ_{ij} – узагальнене переміщення в напрямку дії узагальненої одиничної сили стану i від дії одиничної сили стану j .

9.3. Матриця податливості і матриця жорсткості

Розглянемо яку-небудь стержневу систему, наприклад балку, під дією кількох узагальнених сил P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 9.4).

На підставі принципу незалежності дії сил (принцип суперпозиції) будь-який прогин можна подати як суму прогинів від кожної сили окремо:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in}.$$

Зручно виразити дійсний прогин через прогини, зумовлені дією одиничних сил

$$\Delta_i = \delta_{i1}P_1 + \delta_{i2}P_2 + \dots + \delta_{in}P_n,$$

де δ_{ik} – переміщення від дії сили $P_k = 1$.

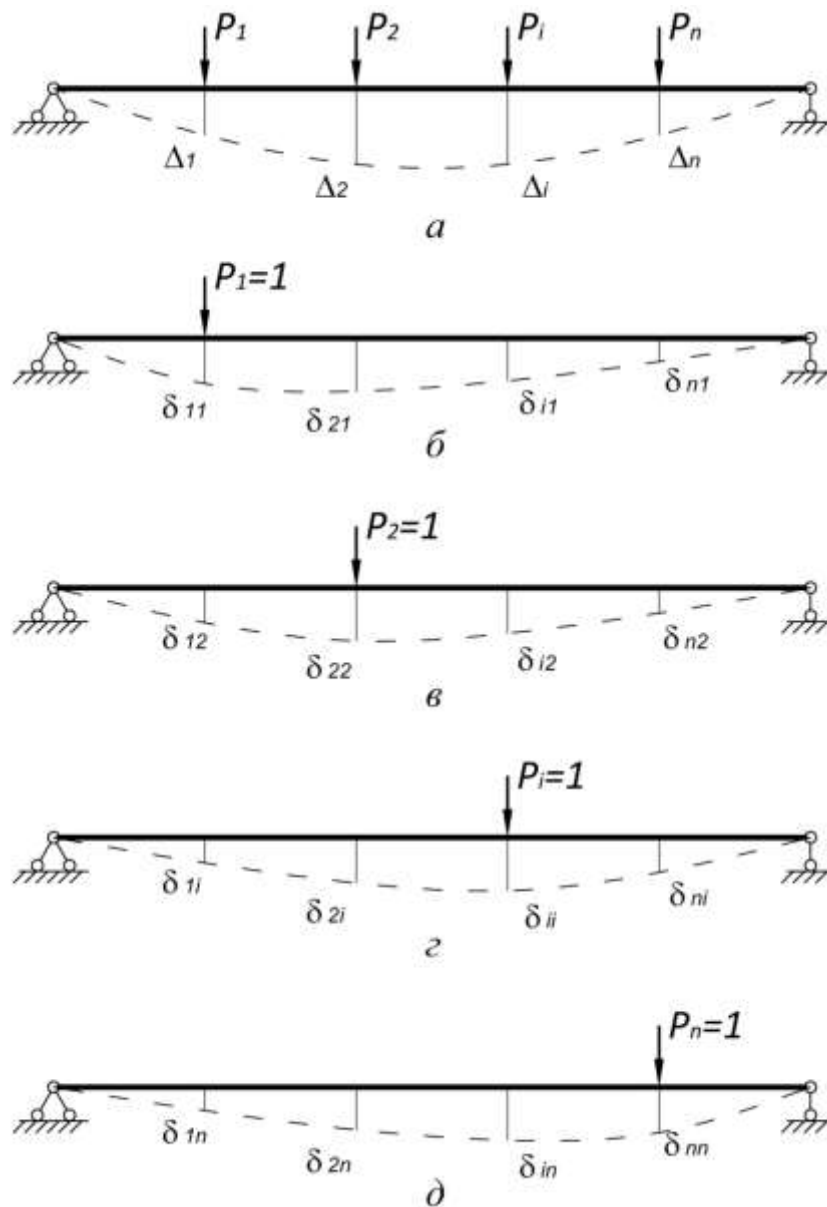


Рис. 9.4

Отже, можна записати

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \dots + \delta_{1n}P_n, \\ \Delta_2 &= \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + \dots + \delta_{2n}P_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_n &= \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + \dots + \delta_{nn}P_n.\end{aligned}$$

В матричній формі

$$\bar{\Delta} = D\bar{P}, \tag{9.3}$$

де $\bar{\Delta}^T = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_n\}$ – вектор узагальнених переміщень, $\bar{P}^T = \{P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n\}$ – вектор зовнішніх дій. D – квадратна матриця одиничних переміщень, тобто переміщень, які зумовлені одиничними узагальненими силами. Зазначена матриця називається **матрицею податливості**:

$$D = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Будь-який коефіцієнт матриці податливості δ_{ij} характеризує величину переміщення в напрямку i від дії в напрямку j одиничної узагальненої сили.

Із матричної рівності (9.3) можна мати величини сил, які відповідають одиничним узагальненим переміщенням:

$$\bar{P} = D^{-1}\bar{\Delta} = K\bar{\Delta}. \tag{9.4}$$

У цьому виразі $K=D^{-1}$ – квадратна матриця, яку називають **матрицею жорсткості**

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}.$$

У координатній формі рівність (9.3) має вигляд

$$\begin{aligned}
P_1 &= k_{11}\Delta_1 + k_{12}\Delta_2 + \dots + k_{1n}\Delta_n, \\
P_2 &= k_{21}\Delta_1 + k_{22}\Delta_2 + \dots + k_{2n}\Delta_n, \\
\dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
P_n &= k_{n1}\Delta_1 + k_{n2}\Delta_2 + \dots + k_{nn}\Delta_n.
\end{aligned}
\tag{9.5}$$

Для визначення фізичного змісту коефіцієнтів матриці жорсткості покладемо в співвідношеннях (9.5) всі переміщення, окрім одного, такими, що дорівнюють нулю. Наприклад, нехай $\Delta_1=\Delta_3=\Delta_4=0$, а $\Delta_2=1$.

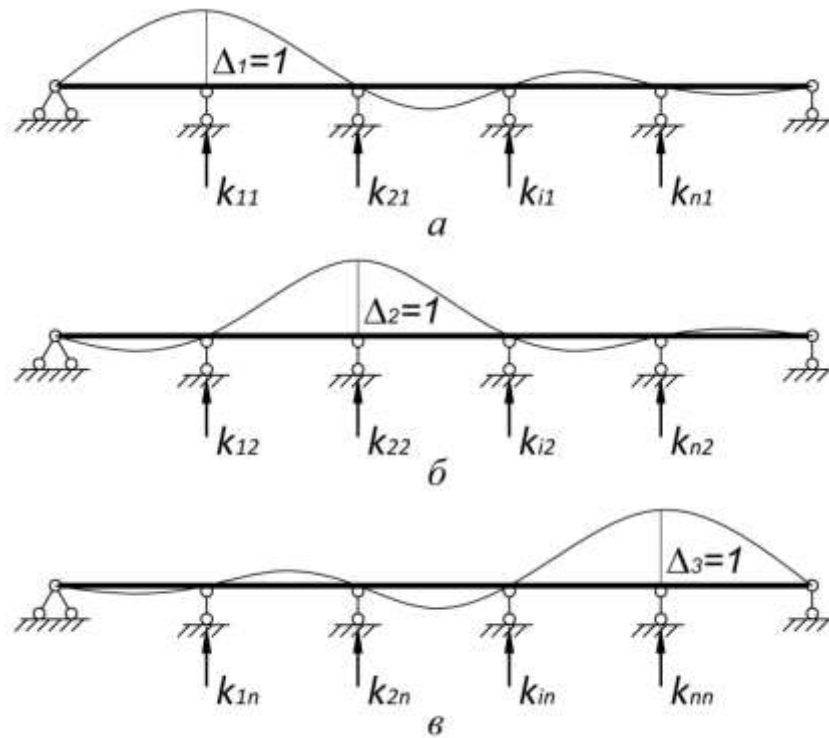


Рис. 9.5

Тоді з першого рівняння $P_1=k_{12}$, тобто коефіцієнт матриці жорсткості за зазначених умов дорівнює першій узагальненій силі в напрямі другого узагальненого переміщення. І взагалі можна сказати, що довільний коефіцієнт k_{ij} дорівнює силі P_i від дії примусового переміщення $\Delta_j=1$ за умови, що всі інші переміщення дорівнюють нулю. Отже, елементи матриці жорсткості можна трактувати як опорні реакції в'язей, що накладені на систему в напрямку можливих переміщень. Тому матрицю жорсткості інколи називають **матрицею реакцій**.

9.4. Інтеграл Мора

Найзагальнішим методом обчислення переміщень у стержневих системах є *метод Мора*. Він впливає з принципу можливих переміщень і дає змогу визначати переміщення точок системи через зусилля в її елементах.

Принцип можливих переміщень, який сформульовано Лагранжем для систем, складених з тіл, що не деформуються, є фундаментальним принципом механіки. Згідно з цим принципом для будь-якої зрівноваженої системи сума робіт всіх прикладених зовнішніх сил на віртуальних переміщеннях дорівнює нулю. Для пружних систем означений принцип може бути сформульований так: *у будь-якій пружній зрівноваженій системі сума робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил на будь-яких можливих нескінченно малих переміщеннях дорівнює нулю, тобто*

$$A + U = 0.$$

У цьому виразі A – робота зовнішніх, а U – внутрішніх сил. Зовнішні сили – це навантаження, що прикладені до конструкції, та опорні реакції, внутрішні – це зусилля, які виникають в елементах споруди під час її деформування. Можливими вважаються переміщення, які припускаються існуючими в'язями.

Розглянемо два напружено-деформованих стани стержневої системи. Перший стан (рис. 9.6, *a*) зумовлено зовнішніми навантаженнями, які, по суті, можуть бути довільними. Назвемо цей напружено-деформований стан стержневої системи *вантажним* або *станом P*.

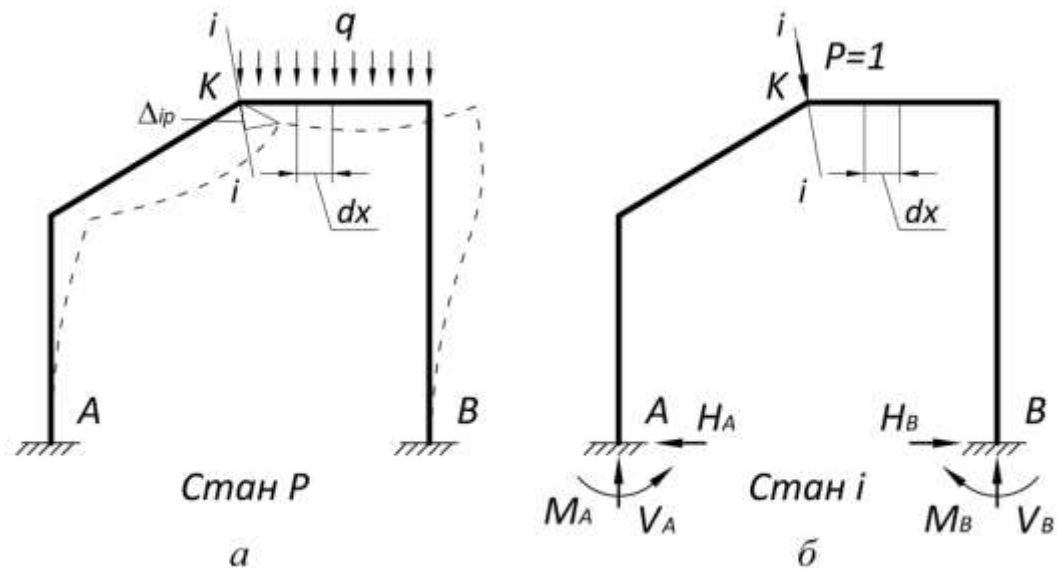


Рис. 9.6

У другому стані (рис. 9.6, б) на стержневу систему вздовж деякої довільної прямої $i-i$ діє одна зосереджена сила, яка дорівнює одиниці. Такий стан (стан i) будемо називати **допоміжним** або **одиничним**.

Обидва ці стани є можливими і, згідно з принципом Лагранжа, сума робіт одного стану на переміщеннях іншого має дорівнювати нулю. Розглянемо можливу роботу сил стану i на переміщеннях стану P :

$$A_{ip} + U_{ip} = 0. \quad (9.6)$$

Можлива робота зовнішніх сил дорівнює добутку одиничної сили стану i на відповідне переміщення стану P

$$A_{ip} = 1 \cdot \Delta_{ip}. \quad (9.7)$$

Підставимо роботу зовнішніх сил (9.7) і можливу роботу внутрішніх сил (9.1) у співвідношення (9.6). Маємо

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l (\bar{N}_i \varepsilon_p dx + \bar{M}_i \kappa_p dx + \bar{Q}_i \gamma_p dx). \quad (9.8)$$

Ця формула є наближеною, оскільки переміщення реальних систем мають скінченні значення. Чим меншу величину становлять переміщення, тим формула точніша. Оскільки жорсткості елементів реальних споруд достатньо великі, цю формулу можна розглядати

як точну. Там, де точність виявляється недостатньою, можуть бути застосовані методи розв'язання геометрично нелінійних задач.

Під час дії на споруду нерухомого зовнішнього навантаження деформації можуть бути виражені через внутрішні сили. Для фізично-лінійних систем

$$\varepsilon_p = \frac{N_p}{EA}, \quad \kappa_p = \frac{1}{\rho_p} = \frac{M_p}{EI}, \quad \gamma_p = \frac{\eta Q_p}{GA}, \quad (9.9)$$

де η – безрозмірний коефіцієнт, що залежить від форми перерізу стержня i обчислюється за формулою

$$\eta = A \int_A \frac{S_x^{відс.}}{I_x b_y} dA.$$

(Зокрема, для прямокутного перерізу $\eta=1,2$).

З урахуванням (9.9) формула для обчислення переміщень (9.8) набуває вигляду

$$\Delta_{ip} = \sum_l \int \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx + \sum_l \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx + \sum_l \int \frac{\eta \bar{Q}_i Q_p}{GA} dx. \quad (9.10)$$

Цей вираз називається **формулою Максвелла-Мора** або **інтегралом Мора**. За допомогою цієї формули можна обчислити будь-яке переміщення в будь-якій стержневій системі через внутрішні зусилля двох її станів. *Перший стан* – **вантажний** – зумовлено дією зовнішніх навантажень, *другий* – **допоміжний** – дією одиначної узагальненої сили, яка відповідає переміщенню, що визначається.

Отже, для обчислення будь-якого переміщення необхідно:

- визначити зусилля M_p, N_p, Q_p від зовнішнього навантаження;
- обрати допоміжний стан i , відкинувши зовнішні навантаження і приклавши одиначну узагальнену силу, що відповідає переміщенню;
- визначити зусилля M_i, N_i, Q_i у допоміжному стані;
- обчислити переміщення за формулою Максвелла-Мора (9.10).

9.5. Окремі випадки застосування формули Максвелла-Мора

Величини кожного з трьох доданків у *формулі Максвелла-Мора* характеризують внесок того чи іншого виду внутрішніх зусиль в переміщення, що розшукується. На підставі аналізу цих доданків можна дійти висновку, що для різних видів конструкцій нехтування деякими видами зусиль мало позначається на значенні переміщення. Так, для балок і рам, деформування яких відбувається переважно за рахунок згину, можна знехтувати впливом поздовжніх і поперечних сил. У такому разі інтеграл Мора матиме вигляд

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx.$$

Для ферм, у стержнях яких існують переважно поздовжні деформації, можна записати:

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx.$$

Для арок:

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx.$$

9.6. Обчислення інтеграла Мора

Інтеграл Мора може бути обчислений або безпосереднім інтегруванням, або за допомогою прийомів чисельного інтегрування. У практичних задачах зазвичай використовують два прийоми чисельного інтегрування: **правило Верещагіна** і **формулу Сімсона-Корноухова**. Процедуру обчислення *інтеграла Мора* в такому разі називають множенням епюр.

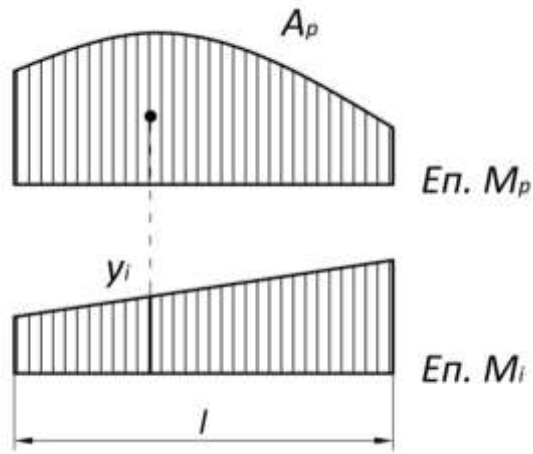


Рис. 9.7

За *правилом Верещагіна* для обчислення $\int_0^l \bar{M}_i M_p dx$ достатньо помножити площу епюри M_p на ординату епюри \bar{M}_i , що береться під центром тяжіння епюри M_p :

$$\int_0^l \bar{M}_i M_p dx = A_p y_i.$$

Якщо ордината y_i і площа A_p розташовані по один і той самий бік стержня, добуток береться зі знаком «плюс».

Розглянемо обчислення інтеграла Мора $\int_0^l \bar{M}_i M_p dx$ на прикладі перемноження двох епюр, одна з яких M_p має довільний характер, а друга – \bar{M}_i обмежена прямою.

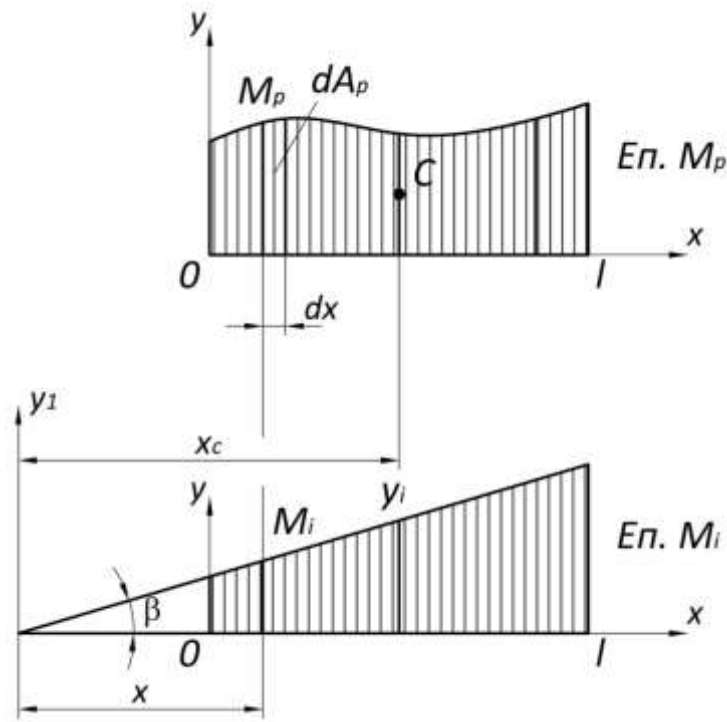


Рис. 9.8

Добуток $M_p dx$ є елементарною площею, яка береться на епюрі M_p :

$$dA_p = M_p dx.$$

Ординату на прямолінійній епюрі можна представити у вигляді $\bar{M}_i = x \operatorname{tg} \beta$. Інтеграл набуває вигляду:

$$\int_0^l \bar{M}_i M_p dx = \int_0^l x \operatorname{tg} \beta dA_p = \operatorname{tg} \beta \int_0^l x dA_p.$$

Інтеграл у правій частині співвідношення – це статичний момент S_p площі епюри M_p відносно осі y_1 яка проходить через точку перетину епюри \bar{M}_i прямою, що збігається з віссю стержня. Як відомо, статичний момент площі дорівнює добутку $S_p = A_p x_c$ площі на координату центра її тяжіння. На цій підставі маємо

$$\int_0^l \bar{M}_i M_p dx = x_c A_p \operatorname{tg} \beta.$$

І нарешті, помітивши, що $x_c A_p \operatorname{tg} \beta = y_i$, остаточно одержуємо:

$$\int_0^l \bar{M}_i M_p dx = A_p y_i.$$

Необхідно звернути увагу:

- принаймні одна з епюр, які перемножуються, має бути прямолінійною;
- ордината y_i має бути взята на прямолінійній епюрі.

Правило *Сімпсона-Корноухова* – окремий випадок відомої з математичного аналізу *формули Сімпсона* для обчислення визначених інтегралів, коли інтервал інтегрування розкладається на дві ділянки:

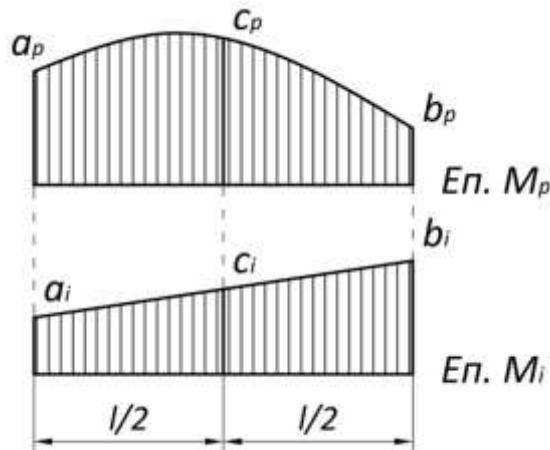


Рис. 9.9

$$\int_0^l \bar{M}_i M_p dx = \frac{l}{6} (a_i a_p + 4c_i c_p + b_i b_p).$$

Використовуючи *формулу Сімпсона-Корноухова* необхідно, щоб обидві перемножувані епюри не мали зламів, розривів і точок перегину. В протилежному разі інтервал інтегрування треба розкласти на окремі підінтервали.

Контрольні запитання

1. Для чого необхідно обчислення переміщень?
2. Яку роботу називають дійсною, додатковою, повною?
3. Яку роботу називають можливою?
4. Що називають узагальненим переміщенням?
5. Що називають узагальненою силою?
6. Що характеризують коефіцієнти матриці податливості?
7. Яку матрицю називають матрицею жорсткості?
8. Який стан системи називають вантажним, а який допоміжним?
9. Що можна обчислити за допомогою формули Максвелла-Мора?
10. Що необхідно для обчислення будь-якого переміщення системи?
11. Який вигляд має інтеграл Мора для обчислення переміщень у балках та рамах.
12. Які прийоми чисельного інтегрування використовуються для обчислення інтеграла Мора?
13. Як обчислити інтеграл Мора використовуючи правило Верещагіна?
14. Як обчислити інтеграл Мора використовуючи формулу Сімпсона-Корноухова?
15. Які необхідні умови для використання формули Сімпсона-Корноухова?

Лекція 10

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

10.1. Ступінь статичної невизначуваності

Основною характеристикою статично невизначуваних систем є ступінь статичної невизначуваності, який характеризує кількість «зайвих» (з погляду кінематичного аналізу) або надлишкових в'язей.

Так, рама, зображена на рис. 10.1, а, має дві жорстко затиснені опори і, отже, шість невідомих опорних реакцій.

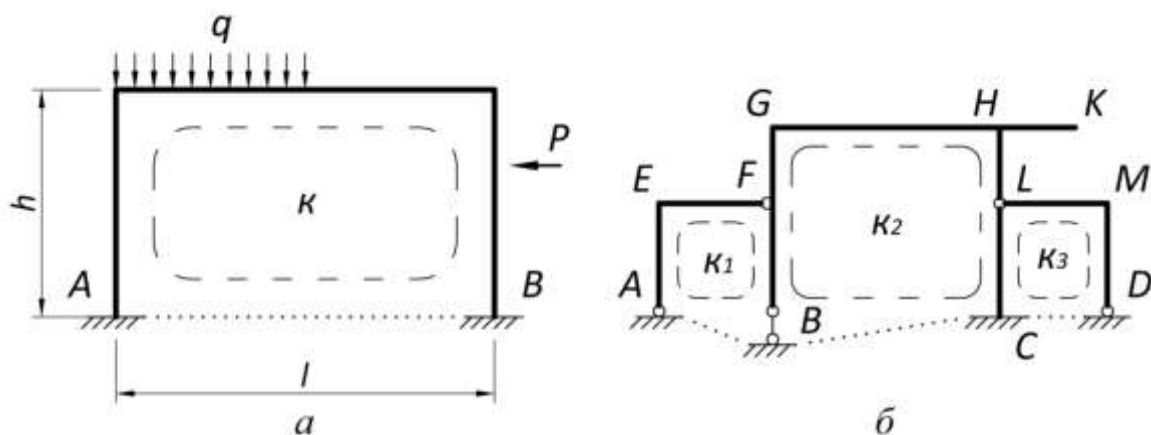


Рис. 10.1

З іншого боку, рама являє собою один диск, для якого на площині можна скласти три рівняння рівноваги. Отже, для визначення опорних реакцій не вистачає трьох рівнянь. Різниця між кількістю невідомих статичних характеристик і кількістю рівнянь рівноваги характеризує ступінь статичної невизначуваності стержневої системи. Тому така рама становить тричі статично невизначувану систему.

Рама містить одне «зайве» затиснення, ліве або праве, і в цьому «зайвому» затисненні виникають три «зайві» опорні реакції. Тому кажуть, що така рама має три «зайві» кінематичні в'язі або просто – три «зайві» або три надлишкові в'язі.

Ступінь статичної невизначуваності може бути обчислений за формулою Чебишова. Проте для практичних розрахунків існує зручніша формула:

$$n=3k-u, \quad (10.1)$$

де n – ступінь статичної невизначуваності плоскої стержневої системи; k – число замкнених контурів в схемі, яке визначається кількістю ділянок, на які розподіляє площину розрахункова схема споруди; u – кількість простих шарнірів.

Так, рама на рис. 10.1, *а* має лише один замкнений контур і не містить шарнірів. Отже

$$n=3 \cdot 1 - 0 = 3.$$

Складніша рама показана на рис. 10.1, *б*. Вона має три замкнених контури, які зображено штриховими лініями, та сім простих шарнірів: у шарнірно-нерухомих опорах A і D та у вузлі F – по одному, в шарнірно-рухомій опорі B – два простих шарніри. Також двом простим шарнірам є еквівалентним складний шарнір у вузлі L . Отже $n=3 \cdot 3 - 7 = 2$, тобто рама містить дві «зайві» в'язі і є двічі статично невизначуваною.

Бувають випадки, коли формулою (10.1) скористатись важко або навіть неможливо. Так представлена на рис. 10.2, *а* рама, містить стержні EH та FG , які не з'єднуються між собою в точці перетину, а лише перехрещуються.

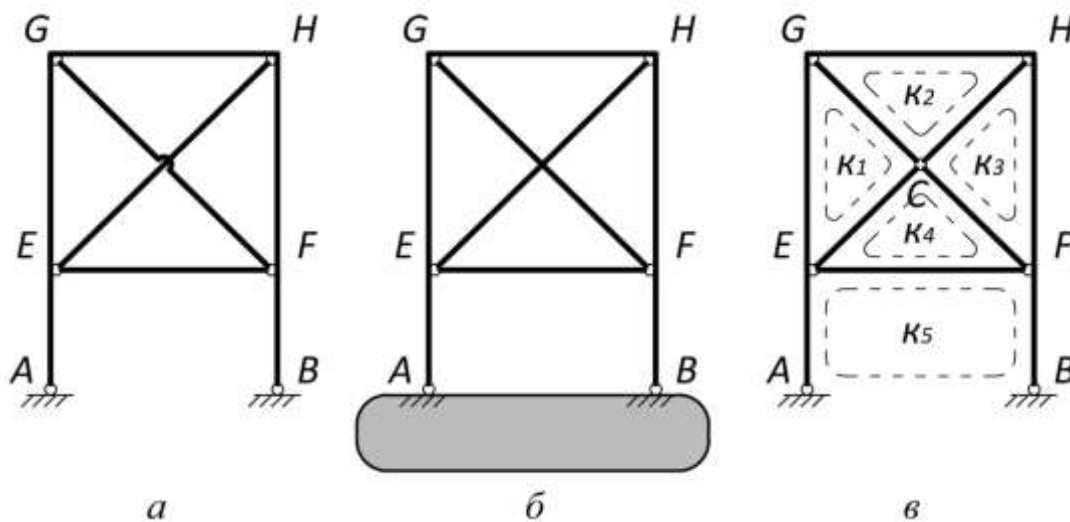


Рис. 10.2

Внаслідок відсутності з'єднання виникає утруднення під час визначення кількості замкнених контурів. Ступінь статичної невизначуваності означеної схеми можна обчислити згідно з формулою

$$n = -\Gamma = -(3D + 2B - 3\Pi - 2\text{Ш} - C - 3).$$

Дійсно, можна трактувати розрахункову схему як сукупність двох дисків: ламаного стержня $AGHB$ і диска-основи (рис. 10.2, б). Диски з'єднані між собою трьома кінематичними в'язями (стержні EF , EH і FG), а також двома простими шарнірами A і B . Припайки та вузли в'язей відсутні. Тобто $D=2$, $B=0$, $\Pi=0$, $\text{Ш}=2$ та $C=3$. Отже

$$n = -(3 \cdot 2 + 0 - 0 - 2 \cdot 2 - 3 - 3) = 4.$$

Можна застосувати й такий прийом. У точку перехрещення кінематичних в'язей умовно вводиться шарнір (точка C на рис. 10.2, в). Це дає змогу визначити кількість замкнених контурів ($\kappa=5$) і кількість простих шарнірів. У такому випадку $m=11$ (по одному шарніру в точках A , B , G , H ; по два простих шарніра в точках E і F , а також потрійний шарнір у точці C). Отже, за формулою (10.1) маємо:

$$n = 3\kappa - m = 3 \cdot 5 - 11 = 4.$$

10.2. Основна система і основні невідомі методу сил

Основною системою методу сил називають геометрично незмінювану і статично визначувану систему, яка одержана із заданої статично невизначуваної схеми відкиданням «зайвих» в'язей.

Реакції відкинутих в'язей прикладаються до основної системи разом із заданими зовнішніми діями як сили, величини яких невідомі. У подальшому ці сили визначатимуться першочергово. Вони становлять основні невідомі задачі і позначаються символами X_1 , X_2 , ..., X_n , де n – ступінь статичної невизначуваності задачі. Так, на рис. 10.3 зображено кілька основних систем рами (рис. 10.1, а), які одержано відкиданням тих чи інших «зайвих» в'язей. В усіх випадках утворені основні геометрично незмінювані системи.

Можна навести кілька найпоширеніших способів відкидання «зайвих» в'язей:

1. Відкидання опорних в'язей. Водночас до основної системи прикладаються реакції відкинутих в'язей (рис. 10.3, а, б, г).
2. Введення шарніра еквівалентне відкиданню однієї в'язі. Водночас з обох боків від шарніра прикладаються зосереджені момен-

ти невідомої величини, які дорівнюють один одному, але спрямовані в протилежних напрямках (рис. 10.3, в, е).

3. Розріз стержня, який має на обох кінцях жорсткі вузли, є еквівалентним відкиданню трьох в'язей. Водночас в місці розрізу прикладаються поздовжні і поперечні сили, а також зосереджені моменти, величини яких невідомі (рис. 10.3, д).

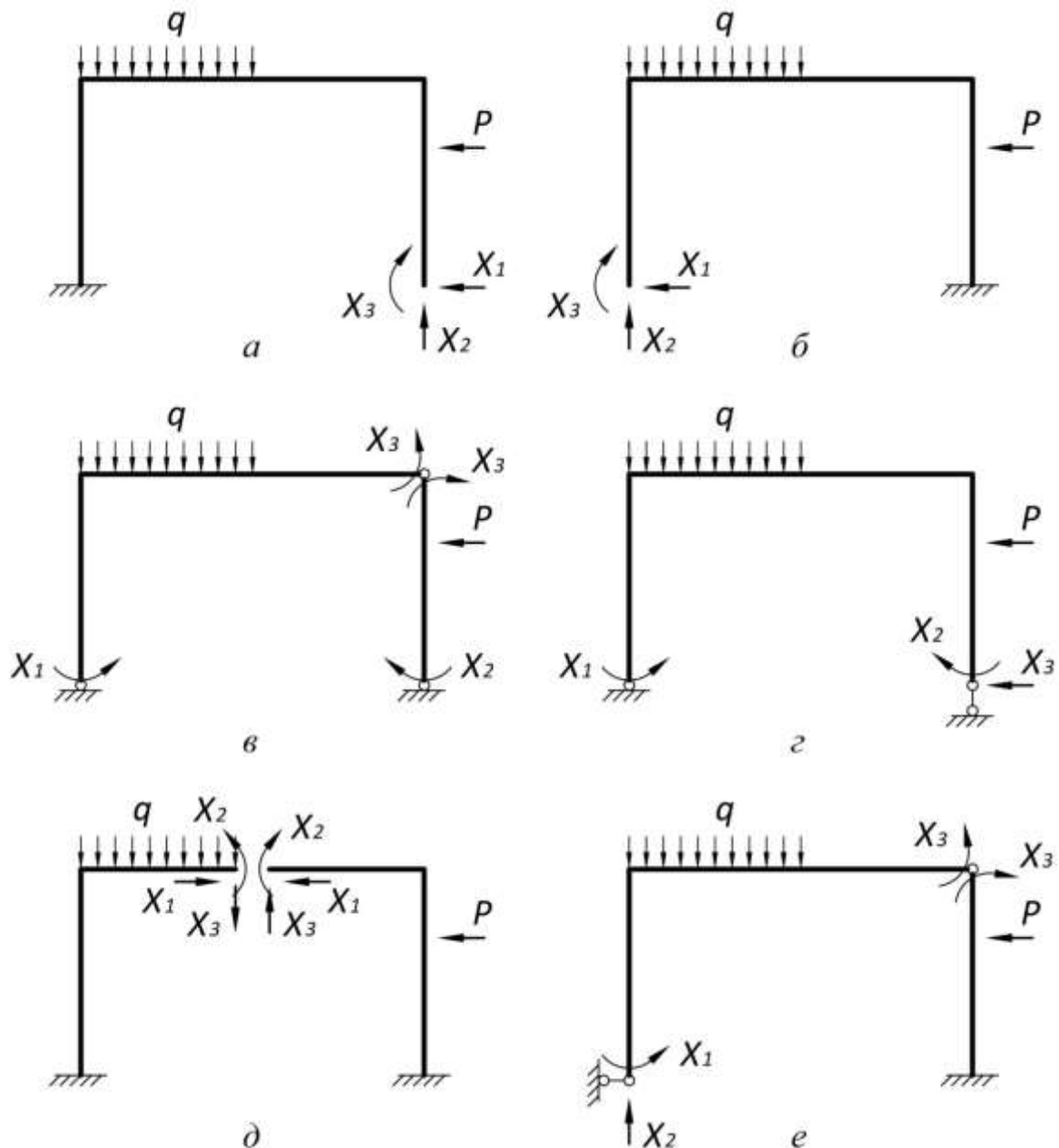


Рис. 10.3

10.3. Система розв'язувальних рівнянь методу сил

Завдяки переходу від розрахункової схеми до основної системи розрахунок статично невизначуваної схеми замінюється на розра-

хунок її статично визначуваної основної системи. Проте деформації і, отже, зусилля, які виникають у цих двох схемах будуть різними.

Для усунення розбіжності в деформуванні цих двох схем на основну систему слід накласти додаткові умови, які зроблять неможливими переміщення в напрямку відкинутих «зайвих» в'язей. Ці умови можуть бути одержані безпосередньо із розгляду деформацій основної системи від заданих зовнішніх дій та від дії основних невідомих.

Повне переміщення основної системи в напрямку «зайвої» в'язі i може бути представлено як сума переміщень від дії кожного зайвого невідомого і зовнішнього навантаження окремо. Так, для двічі статично невизначуваної рами (рис. 10.4, *a*), основна система якої показана на рис. 10.4, *б*

$$\Delta_{1\Sigma} = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1p},$$

$$\Delta_{2\Sigma} = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2p},$$

де Δ_{ik} – переміщення в стані k основної системи в напрямку основного невідомого X_i . Кожне з переміщень, зумовлене дією основного невідомого (рис. 10.4, *в*, *г*), може бути представлено як добуток переміщення від дії цього невідомого, яке умовно приймається за одиницю, на його дійсну поки що невідому величину:

$$\Delta_{11} = \delta_{11}X_1, \quad \Delta_{12} = \delta_{12}X_2, \quad \Delta_{21} = \delta_{21}X_1, \quad \Delta_{22} = \delta_{22}X_2,$$

де δ_{ik} – аналогічні переміщення від дії основних одиничних невідомих. Величини Δ_{ip} характеризують переміщення основної системи в напрямку основного невідомого X_i у вантажному стані (рис. 10.4, *д*).

Враховуючи, що дійсні переміщення заданої рами в напрямках «зайвих» в'язей відсутні (рис. 10.4, *e*), тобто $\Delta_{1\Sigma} = \Delta_{2\Sigma} = 0$, запишемо:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Для n разів статично невизначуваної системи повне переміщення в напрямку відкинутої «зайвої» в'язі i може бути записано аналогічно:

$$\Delta_{i\Sigma} = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{ii} + \dots + \Delta_{in} + \Delta_{ip} = 0, \quad (10.2)$$

але

$$\Delta_{i1} = \delta_{i1}X_1, \Delta_{i2} = \delta_{i2}X_2, \dots, \Delta_{ii} = \delta_{ii}X_i, \dots, \Delta_{in} = \delta_{in}X_n. \quad (10.3)$$

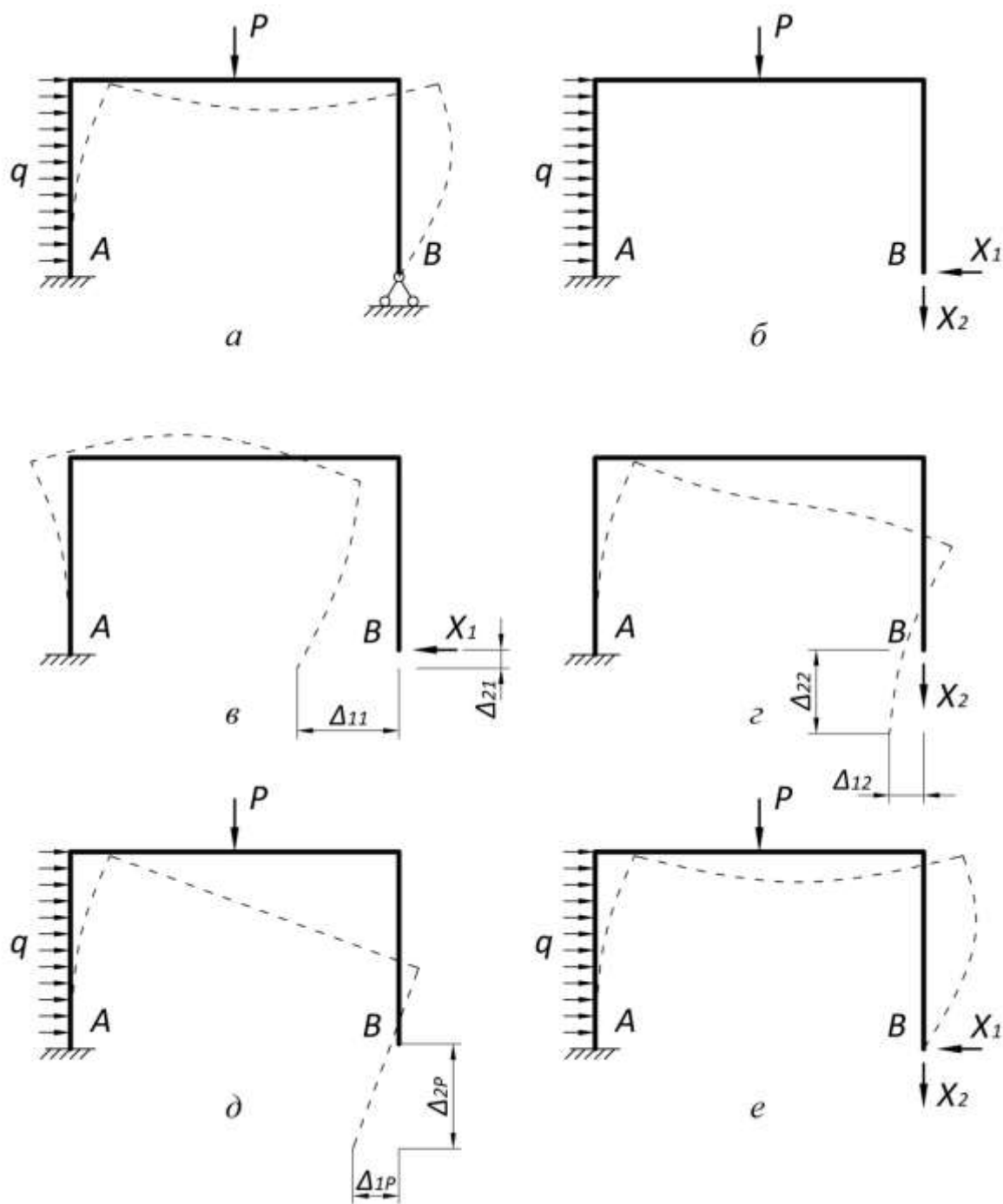


Рис. 10.4

Підставивши (10.3) у (10.2) дістанемо рівняння

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{ii}X_i + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{ip} = 0. \quad (10.4)$$

Записавши рівняння (10.4) послідовно для кожної відкинутої в'язі, отримаємо систему рівнянь відносно основних невідомих задачі:

$$\begin{aligned}
 \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} &= 0; \\
 \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} &= 0; \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\
 \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{10.5}$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (10.5) є математичною умовою відсутності переміщень в основній системі в напрямках відкинутих «зайвих» в'язей. При виконанні цих умов деформований і, отже, напружений стан статично визначуваної основної системи буде еквівалентним напружено-деформованому стану вихідної статично невизначуваної системи.

Рівняння (10.5) не залежать від вигляду, навантаження, обраної основної системи, чи від характеру основних невідомих. Вони мають стандартний (канонічний) вигляд:

- кількість рівнянь i , отже, кількість невідомих в кожному рівнянні, дорівнює ступеню статичної невизначуваності n ;
- коефіцієнт δ_{ij} при кожному невідомому має два індекси: перший індекс i відповідає номеру рядка, другий індекс j – номеру стовпця (номеру невідомого);
- у кожному рівнянні є вільний член Δ_{ip} , перший індекс якого відповідає номеру рівняння.

Система рівнянь (10.5) називається системою канонічних рівнянь методу сил. Невідомі системи канонічних рівнянь становлять сили – реакції відкинутих «зайвих» в'язей, коефіцієнти – переміщення в основній системі в напрямку цих в'язей від дії одиничних основних невідомих. Коефіцієнти при невідомих називають **одичними переміщеннями**, а вільні члени – **вантажними**.

Згідно з означеними правилами можна записувати систему рівнянь методу сил формально. Так, для рами (рис. 10.1), яка має три

«зайві» в'язі, система канонічних рівнянь методу сил матиме вигляд:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0.\end{aligned}\tag{10.6}$$

Необхідно враховувати те, що конкретний фізичний зміст рівнянь змінюється залежно від вибору основної системи і призначення основних невідомих. Так, якщо перше рівняння з (10.6) для основної системи (рис. 10.3, *a*) виражає відсутність горизонтального переміщення перерізу *B*, то для другої основної системи (рис. 10.3, *б*) – рівність нулю вертикального переміщення перерізу *A*, а для основної системи (рис. 10.3, *e*) – рівність нулю кута повороту стійки в точці *B*.

Система канонічних рівнянь методу сил може бути записана в матричному вигляді:

$$D\vec{X} + \vec{\Delta} = 0,$$

де $\vec{X}^T = \{X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n\}$ – вектор основних невідомих,

$\vec{\Delta}^T = \{\Delta_{1p} \quad \Delta_{2p} \quad \dots \quad \Delta_{np}\}$ – вектор вантажних переміщень,

D – матриця податливості основної системи в напрямках відкинутих в'язей:

$$D = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Властивості елементів матриці податливості:

- коефіцієнти, які розташовані на головній діагоналі (головні коефіцієнти), являють собою додатні числа: $\delta_{ii} > 0$;
- побічні коефіцієнти є симетричними відносно головної діагоналі, тобто $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Для визначення системи канонічних рівнянь методу сил можна

скористатись іншим підходом, що базується на **теоремі Кастільяно**, точніше на окремому її випадку, згідно з яким частинні похідні від потенціальної енергії деформації по реакціях зайвих в'язей системи дорівнюють нулю (теорема Менабреа).

Потенціальна енергія деформацій, якщо урахувати тільки згинальні моменти виражається співвідношенням

$$U = \sum \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx.$$

Керуючись принципом незалежності дій, згинальний момент у довільному перерізі будь-якого стержня основної системи n раз статично невизначуваної розрахункової схеми може бути виражений через прикладені сили:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_i X_i + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p, \quad (10.7)$$

де $\bar{M}_i = \bar{M}_i(x)$, $M_p = M_p(x)$ – функції координати x перерізу стержня, які виражають згинальні моменти в основній системі, що зумовлені дією основних невідомих $X_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) і заданого зовнішнього навантаження відповідно.

Необхідною умовою екстремуму функціонала потенціальної енергії є рівність нулю її першого диференціала, що еквівалентно рівності нулю всіх її перших похідних по незалежних параметрах навантаження X_1, X_1, \dots, X_n . Інакше кажучи, повинна мати місце рівність

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \sum \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = 0.$$

Як відомо, похідну можна внести під знак інтеграла:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \sum \int_0^l \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{M^2}{2EI} \right) dx = 0. \quad (10.8)$$

Виконаємо диференціювання, вважаючи жорсткості стержнів EI постійними:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \sum \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_i} dx = 0.$$

Похідна від згинального моменту (10.7) має вигляд

$$\frac{\partial M}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_i X_i + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p) = \bar{M}_i.$$

Підставивши останню похідну до (10.8), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X_i} = & X_1 \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_1}{EI} dx + X_2 \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_2}{EI} dx + \dots + \\ & + X_n \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_n}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx = 0. \end{aligned}$$

Беручи до уваги те, що вирази при невідомих і вільний член являють собою переміщення, запишемо

$$\delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{ip} = 0,$$

тобто одержимо результат, що є аналогічним (10.4). Означене рівняння виражає умову нерозривності деформації в напрямку «зайвої» відкинутої в'язі. Диференціюючи потенціальну енергію U по чергово по кожному параметру X_i ($i = 1, 2, \dots, n$), одержимо систему канонічних рівнянь (10.5).

10.4. Обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

Коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу сил (елементи матриці податливості основної системи) являють собою переміщення основної системи від дії основних невідомих, які покладають за одиницю. Для обчислення коефіцієнтів необхідно скористатися формулою Максвелла-Мора, яка для плоских систем має вигляд

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx + \sum \int_l \frac{\eta \bar{Q}_i Q_p}{GA} dx.$$

Для різного типу розрахункових схем звичайно утримують лише деякі складові формули. Так, розраховуючи елементи, які пере-

важно працюють на згин (балки, рами), утримується доданок, який залежить від згинальних моментів:

$$\delta_{ij} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx, \quad \Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx. \quad (10.9)$$

Для ферм ураховують лише поздовжні сили:

$$\delta_{ij} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA} dx, \quad \Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx.$$

Для арок:

$$\delta_{ij} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx,$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx.$$

Отже, для обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь необхідно визначити зусилля, які виникають у всіх елементах основної системи від дії зовнішнього навантаження, а також від дії кожного основного невідомого $X_i=1$.

У практичних розрахунках безпосереднє інтегрування замінюється чисельним з використанням правила Верещагіна, формули Сімпсона-Корноухова, формули прямокутників, трапецій тощо. Тому для подальшого розрахунку будуються епюри зусиль у статично визначуваній основній системі. Так, для рами, зображеної на рис. 10.1, а, у процесі використання основної системи (рис. 10.3, а) будуються епюри $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ від дії одиничних основних невідомих і епюра M_p від дії зовнішнього навантаження (рис. 11.1), після чого за формулами (10.9) можна обчислити коефіцієнти канонічних рівнянь (10.6). Розв'язок системи рівнянь визначає величини основних невідомих – реакцій «зайвих» в'язей.

Лекція 11

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

11.1. Визначення дійсних зусиль

Існує два основних способи визначення дійсних зусиль в елементах статично невизначуваної системи, що розраховується за методом сил. Обидва способи ґрунтуються на тому, що епюри будуються не в заданій схемі, а в статично визначуваній основній системі, яка перебуває під дією заданих зовнішніх навантажень і реакцій відкинутих в'язей, які знайдено після розв'язання канонічних рівнянь.

Перший спосіб, який називають статичним, полягає в тому, що виконується звичайний статичний розрахунок основної системи від одночасної дії всіх сил включно з основними невідомими задачі. Водночас звичайними способами визначаються опорні реакції і будуються епюри зусиль або відшукуються їхні величини в характерних точках схеми.

Другий спосіб – це спосіб накладання. Він ґрунтується на принципі незалежності дій (принципі суперпозиції) і полягає в тому, що будь-яке зусилля, напруження або переміщення може бути одержано як сума цих величин від кожної дії окремо. На цій підставі можна записати

$$\begin{aligned}M_{\partial} &= \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p, \\Q_{\partial} &= \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n + Q_p, \\N_{\partial} &= \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_p.\end{aligned}\tag{11.1}$$

Під величинами $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ слід розуміти або зусилля в якомусь перерізі або епюри зусиль в основній системі, зумовлені дією одиничних основних невідомих (рис. 11.1).

Дійсні епюри зусиль у рамі, що розглядається, побудовані на рис. 11.2, а, б, в. Між епюрами M_{∂} і Q_{∂} виконується диференціальна залежність $Q_{\partial} = dM_{\partial}/dx$.

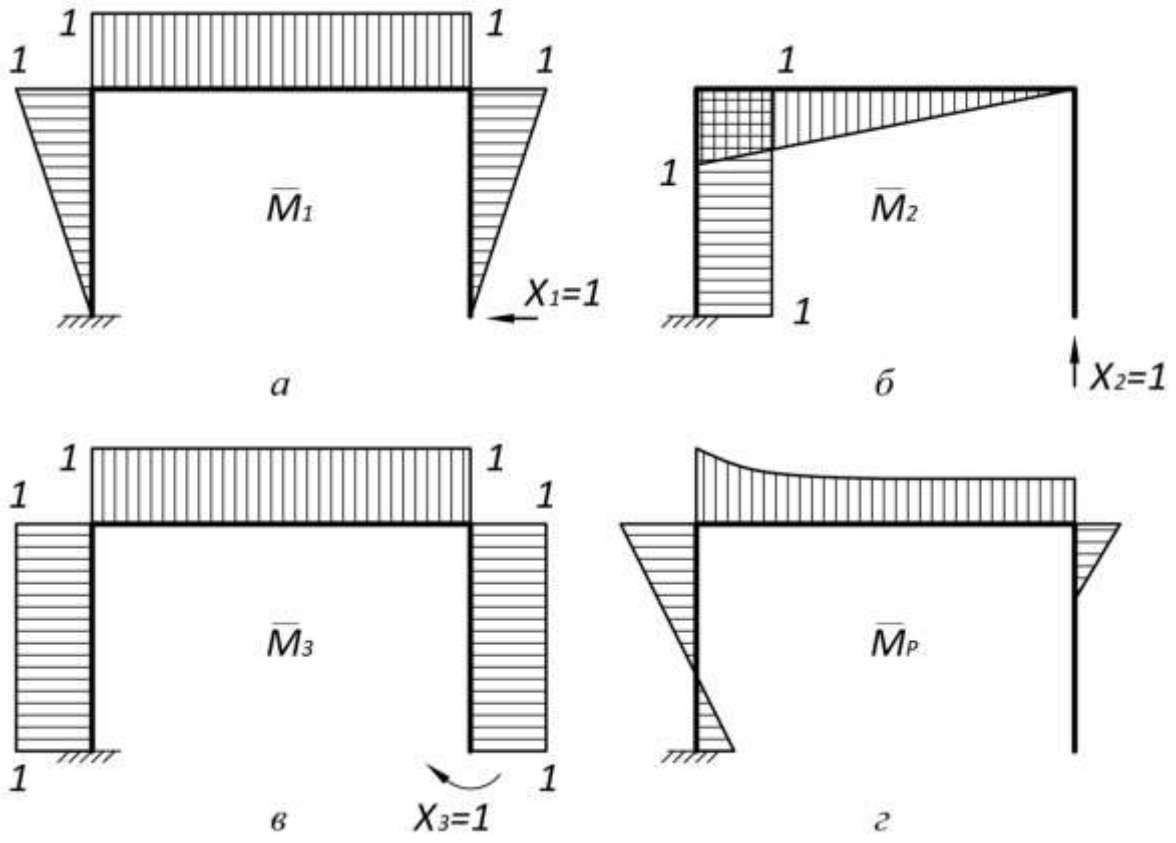


Рис. 11.1

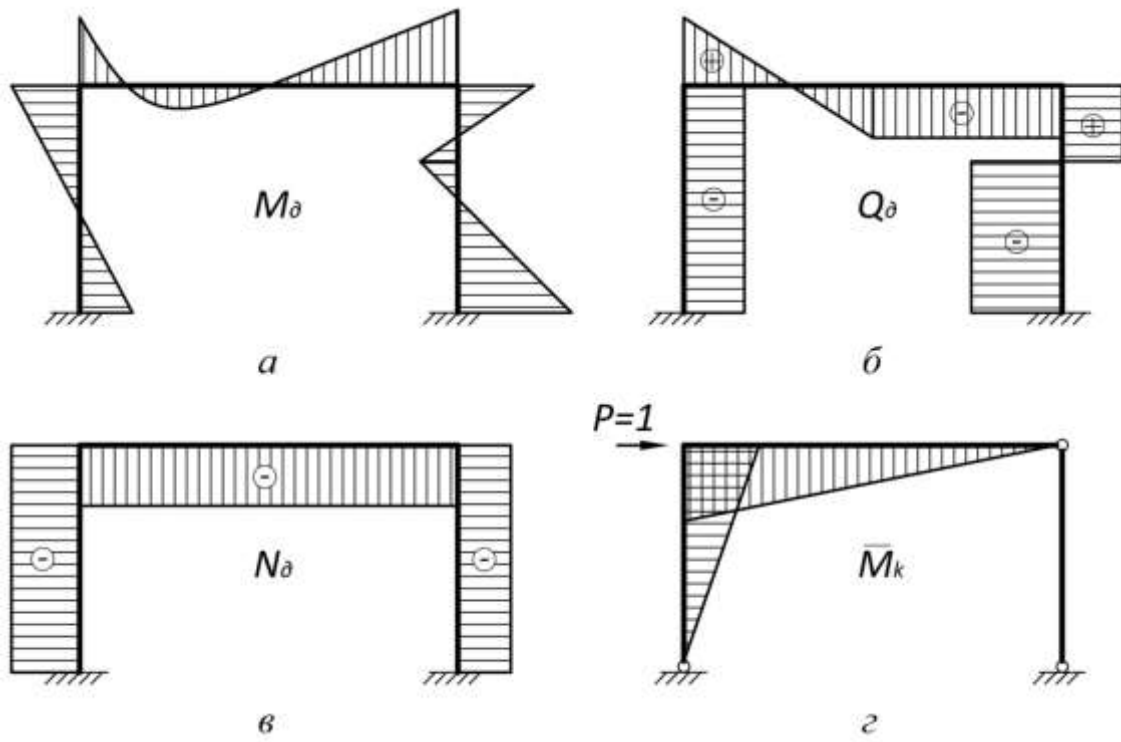


Рис. 11.2

11.2. Обчислення переміщень у статично невизначуваних системах

Переміщення у статично невизначуваних системах можуть бути обчислені за формулою Максвелла-Мора:

$$\Delta_{k\delta} = \sum_l \int \frac{\bar{N}_k N_\delta}{EA} dx + \sum_l \int \frac{\bar{M}_k M_\delta}{EI} dx + \sum_l \int \frac{\eta \bar{Q}_k Q_\delta}{GA} dx. \quad (11.2)$$

У цьому співвідношенні $M_\delta, Q_\delta, N_\delta$ – дійсні зусилля у статично невизначуваній системі, $\bar{M}_k, \bar{Q}_k, \bar{N}_k$ – зусилля, зумовлені одиничною узагальненою силою, що відповідає переміщенню, що розшукується. Означені зусилля можуть бути обчислені для вихідної статично невизначуваної системи. Для цього їй доведеться розраховувати за методом сил на дію допоміжного одиничного навантаження. Проте, якщо взяти до уваги, що дійсні зусилля $M_\delta, Q_\delta, N_\delta$ фактично обчислюються в статично визначуваній основній системі, то переміщення також можуть бути обчислені в тій самій основній системі. Отже, зусилля $\bar{M}_k, \bar{Q}_k, \bar{N}_k$ можна знайти в статично визначуваній основній системі, яка перебуває під дією зовнішніх навантажень і дійсних величин реакцій у відкинутих в'язях. Оскільки кінцеві значення дійсних зусиль не залежать від вибору основної системи, для обчислення переміщень можна брати як основну систему, за якою провадився розрахунок, так і будь-яку іншу. Так, для визначення горизонтального переміщення ригеля в рамі, що розглядається, можна прикласти до ригеля в допоміжному стані одиничну горизонтальну силу і побудувати одиничну епюру \bar{M}_k в основній системі, за якою проводився розрахунок (рис. 10.3, а), або в будь-якій іншій, наприклад, в основній системі, що зображена на рис. 10.3, в. Відповідна одинична епюра показана на рис. 11.2, г.

Отже, визначення переміщення в статично невизначуваній системі від дії зовнішнього навантаження слід виконувати в такій послідовності:

1. Визначити дійсні зусилля в статично невизначуваній системі ($M_\delta, Q_\delta, N_\delta$).
2. Вибрати будь-яку основну систему методу сил для вихідної ста-

- тично невизначуваної системи.
3. Утворити допоміжний «одичний» стан k цієї основної системи, приклавши до неї одичну узагальнену силу, що відповідає переміщенню, що визначається.
 4. Визначити зусилля в допоміжному одичному стані $(\bar{M}_k, \bar{Q}_k, \bar{N}_k)$.
 5. Обчислити переміщення за формулою Максвелла-Мора.

11.3. Кінематична перевірка розрахунку

Для перевірки правильності розрахунку будь-якої статично невизначуваної системи застосовують так звану кінематичну перевірку. Вона базується на *теоремі Менабреа* і полягає в обчисленні переміщення, яке напевно дорівнює нулю. Такими переміщеннями в вихідній статично невизначуваній схемі є переміщення в напрямках існуючих в'язей. Перемножимо, наприклад, за формулою Мора дійсну епюру зусиль що побудована за формулою (11.1), в n раз статично невизначуваній рамі на будь-яку одичну епюру \bar{M}_i :

$$\Delta_{i\partial} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_{\partial}}{EI} dx = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p)}{EI} dx.$$

Розкривши дужки, замінимо інтеграл суми на суму інтегралів. Винесемо постійні величини за знаки інтегралів:

$$\begin{aligned} \Delta_{i\partial} &= \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_{\partial}}{EI} dx = X_1 \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_1}{EI} dx + X_2 \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_2}{EI} dx + \dots + \\ &+ X_n \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_n}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx. \end{aligned}$$

Враховуючи, що коефіцієнти при основних невідомих являють собою переміщення, перепишемо одержаний вираз:

$$\Delta_{i\partial} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_{\partial}}{EI} dx = \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{ip}$$

Порівнюючи праву частину співвідношення з (10.4) доходимо висновку, що

$$\Delta_{i\delta} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_{\delta}}{EI} dx = 0$$

Отже, для перевірки правильності розрахунку статично невизначуваної системи достатньо в будь-якій основній системі методу сил визначити зусилля від дії будь-якого основного невідомого $X_i=1$ і помножити їх за формулою Мора на дійсні зусилля. Якщо результат дорівнює нулю, то зусилля знайдено правильно.

Контрольні запитання

1. Назвіть основну характеристику статично невизначуваних систем.
2. Яку формулу використовують для обчислення ступеня статичної невизначуваності статично невизначуваних систем?
3. Що називають основною системою методу сил?
4. Що є основними невідомими методу сил?
5. Який вигляд має система розв'язувальних рівнянь методу сил?
6. Що є невідомими системи канонічних рівнянь методу сил?
7. Як називають коефіцієнти при невідомих та вільні члени у канонічних рівняннях методу сил?
8. Як здійснюється обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь методу сил?
9. Як здійснюється визначення дійсних зусиль в елементах статично невизначуваної системи при її розрахунку методом сил?
10. Як здійснюється обчислення переміщень у статично невизначуваних системах?
11. Як здійснюється кінематична перевірка розрахунку?

Лекція 12

РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗНОЇ БАЛКИ

Суцільну статично невизначувану балку, яка не переривається на всьому протязі шарнірами, називають нерозрізною.

З погляду кінематичного аналізу всі опорні в'язі за винятком трьох є «зайвими» в'язями. Отже ступінь статичної невизначуваності балки може бути обчислений за формулою

$$n=C-3,$$

де C – кількість опорних в'язей (для шарнірно-рухомої опори $C=1$, для шарнірно-нерухомої опори $C=2$, для затиснення $C=3$).

Так, для балки, що показана на рис. 12.1, а, ступінь статичної невизначуваності $n=7-3=4$.

Ступінь статичної невизначуваності балки може бути також обчислений за формулою $n=3k-ш$.

12.1. Рівняння трьох моментів

Основна система для розрахунку нерозрізної балки за методом сил може бути утворена відкиданням будь-яких в'язей, що можуть розглядатись як «зайві». Так, можна відкинути всі проміжні шарнірно-рухомі опори. Тоді основна система становитиме статично визначувану і геометрично незмінювану балку на двох опорах, до якої разом із зовнішніми навантаженнями прикладені реакції відкинутих опор X_1 , X_2 , X_3 і X_4 як сили невідомої величини. Хоч така основна система формально і є правильною, разом із тим вона вкрай нераціональна.

Для розрахунку нерозрізних балок слід використовувати запропоновану Б.П. Клайпероном стандартну основну систему, що утворюється встановленням шарнірів над опорами (рис. 12.1, б). Система являє собою сукупність окремих однопрольотних балок, які деформуються незалежно одна від одної. Тому дія зовнішнього навантаження з однієї однопрольотної балки на іншу не передається. Основними невідомими в такому випадку є загальні моменти, що виникають у перерізах балки над її опорами, так звані **опорні моменти**.

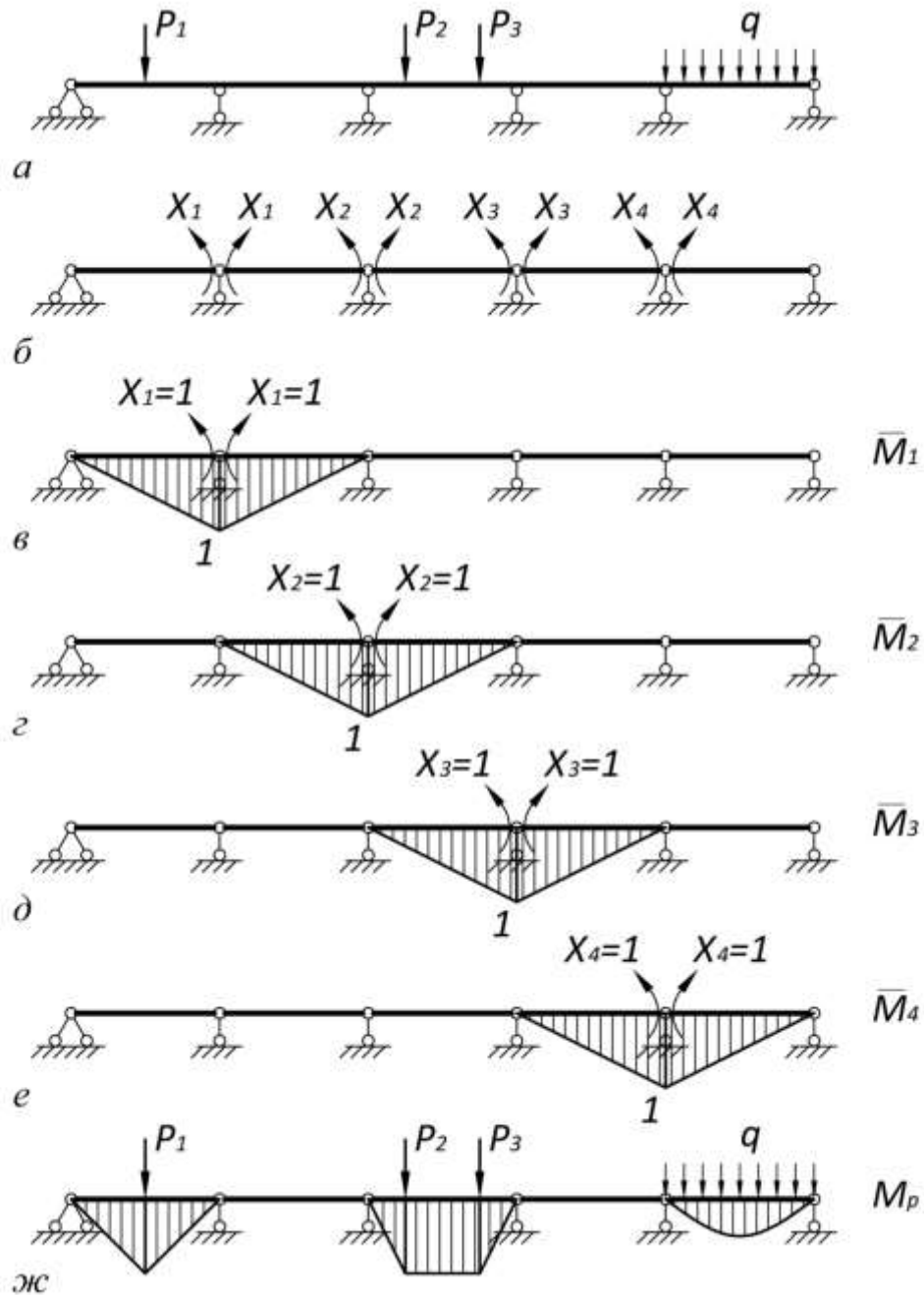


Рис. 12.1

Для нерозрізної балки, що розглядається, система канонічних рівнянь матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3p} &= 0; \\ \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} &= 0. \end{aligned}$$

Одиничні і вантажну епюри згинальних моментів побудовано на рис. 12.1, в, г, д, е, є. На підставі того, що деякі епюри не мають спільних ділянок, можна записати

$$\delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{24} = \delta_{31} = \delta_{41} = \delta_{42} = 0.$$

Система канонічних рівнянь з урахуванням цього матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3p} &= 0; \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} &= 0. \end{aligned}$$

В кожному рівнянні, крім першого і останнього, тільки три коефіцієнти при невідомих відмінні від нуля: головний і два сусідніх з ним. Тому довільне рівняння i матиме вигляд

$$\delta_{i,i-1}X_{i-1} + \delta_{i,i}X_i + \delta_{i,i+1}X_{i+1} + \Delta_{ip} = 0.$$

Розглянемо епюри, необхідні для обчислення коефіцієнтів цього рівняння. На рис. 12.2 зображено фрагмент нерозрізної балки та епюри згинальних моментів від одиничних невідомих та від зовнішнього навантаження.

Обчислимо коефіцієнти рівняння за формулою Мора:

$$\delta_{i,i-1} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_{i-1}}{EI} dx = \frac{1}{EI_i} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_i \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_i}{6EI_i},$$

$$\delta_{i,i} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_i}{EI} dx = \frac{1}{EI_i} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_i \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{i+1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}},$$

$$\delta_{i,i+1} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_{i+1}}{EI} dx = \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{i+1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}},$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx = \frac{1}{EI_i} \Omega_{p,i} y_i + \frac{1}{EI_{i+1}} \Omega_{p,i+1} y_{i+1}.$$

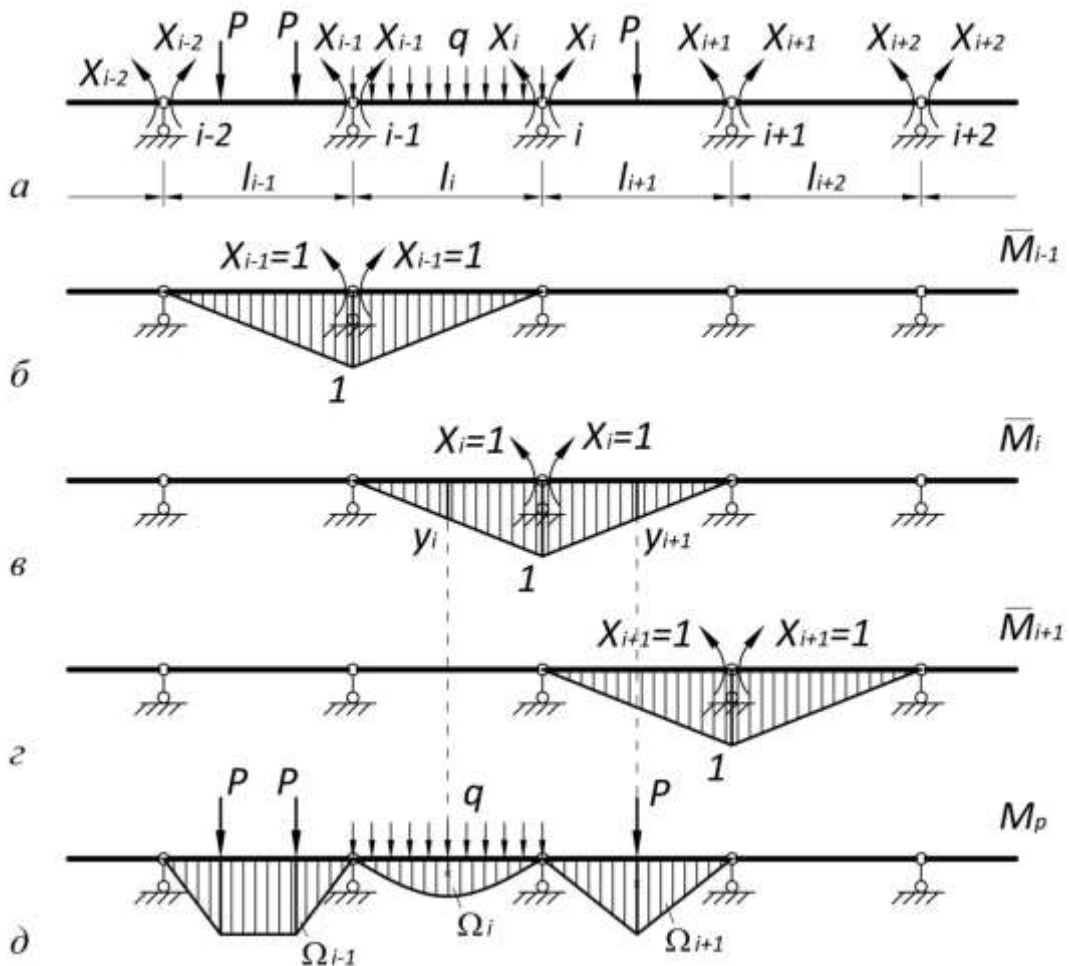


Рис. 12.2

Після підстановки переміщень до рівняння та деяких перетворень одержимо остаточно:

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6 \left(\frac{l'_i}{l_i} B_i^\Phi + \frac{l'_{i+1}}{l_{i+1}} A_{i+1}^\Phi \right), \quad (12.1)$$

де l'_i, l'_{i+1} – зведені довжини прогонів, які обчислюються за форму-

лами: $l'_i = \frac{EI_0}{EI_i} l_i$, $l'_{i+1} = \frac{EI_0}{EI_{i+1}} l_{i+1}$, де EI_0 – згинна жорсткість одного

з прогонів балки, яка обирається за основну; B_i^Φ, A_{i+1}^Φ – фіктивні опорні реакції на опорі i в прогонах l_i і l_{i+1} відповідно.

Для визначення фіктивних опорних реакцій необхідно побудувати епюри M_p від зовнішнього навантаження в цих прогонах як в окремих однопрогонових балках. Ці епюри слід розглядати як деяке фіктивне навантаження, що зумовлює появу означених фіктивних

реакцій. На рис. 12.3 показано дві схеми фіктивного навантаження і фіктивних опорних реакцій розглянутої балки.

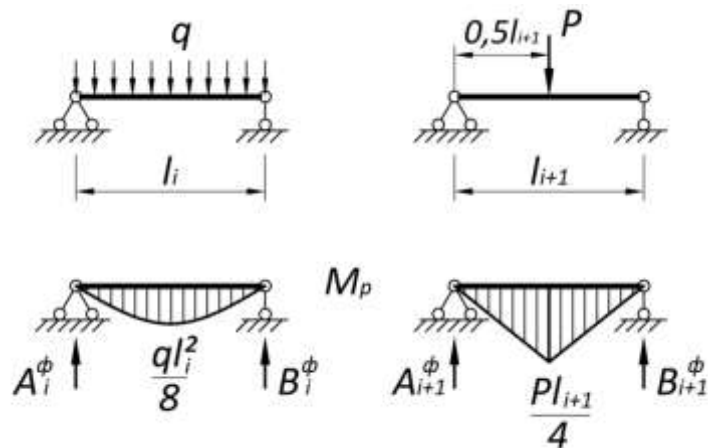


Рис. 12.3

Значення фіктивних реакцій опор для деяких прогонових навантажень наведено в Довіднику 1 підручника [1].

Записане рівняння слушне лише в тому випадку, якщо основна система одержана постановкою шарнірів над опорами і основні невідомі являють собою опорні моменти, тобто $X_{i-1} \equiv M_{i-1}$, $X_i \equiv M_i$, $X_{i+1} \equiv M_{i+1}$. Тому це рівняння часто записують так:

$$l'_i M_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) M_i + l'_{i+1} M_{i+1} = -6 \left(\frac{l'_i}{l_i} B_i^\phi + \frac{l'_{i+1}}{l_{i+1}} A_{i+1}^\phi \right). \quad (12.2)$$

і називають **рівнянням трьох моментів**.

Цим рівнянням можна скористатися для формального складання системи канонічних рівнянь методу сил, якщо нерозрізна балка має стандартний вигляд, тобто має на кінцях шарнірні опори. Щоби перейти до стандартної схеми потрібно:

- відкинути консолі, якщо вони є, а затиснення замінити на фіктивні прогони нульової довжини;
- пронумерувати опори зліва направо;
- пронумерувати прогони в такий спосіб, щоб їхні номери відповідали номерам правих опор прогонів.

Так, розрахункова схема нерозрізної балки (рис. 12.4, а) замінена стандартною схемою (рис. 12.4, б).

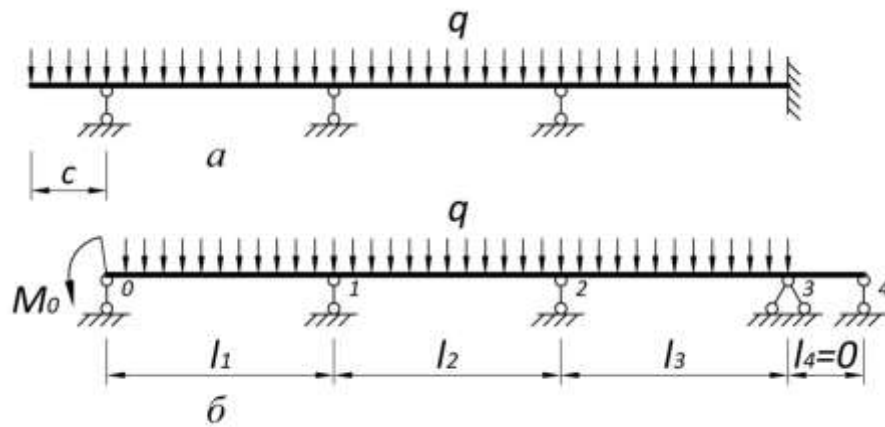


Рис. 12.4

З викладеного випливає, що для складання системи канонічних рівнянь методу сил для нерозрізної балки не обов'язково будувати одиничні епюри в основній системі і обчислювати переміщення за формулою Мора. Цілком достатньо записати рівняння трьох моментів (12.1) або (12.2) для кожної проміжної опори стандартної схеми балки, надаючи індексу i почергового значення 1, 2 тощо.

Розглянемо обчислення дійсних зусиль у довільному прогоні нерозрізної балки. Скористаємося способом накладання:

$$M_{\partial} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_p.$$

Оскільки в довільному прогоні l_i лише дві одиничні епюри, що відмінні від нуля, запишемо

$$M_{\partial} = \bar{M}_{i-1} X_{i-1} + \bar{M}_i X_i + M_p.$$

Для будь-якого перерізу з координатою z (рис. 12.5) можна записати, що

$$M_{\partial}^z = \frac{M_{i-1}}{l_i} (l_i - z) + \frac{M_i}{l_i} z + M_p^z. \quad (12.3)$$

Продиференціювавши цей вираз, дістанемо формулу для обчислення поперечних сил в довільному перерізі будь-якого прогону нерозрізної балки:

$$Q_{\partial}^z = \frac{dM_{\partial}^z}{dz} = \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} + Q_p^z. \quad (12.4)$$

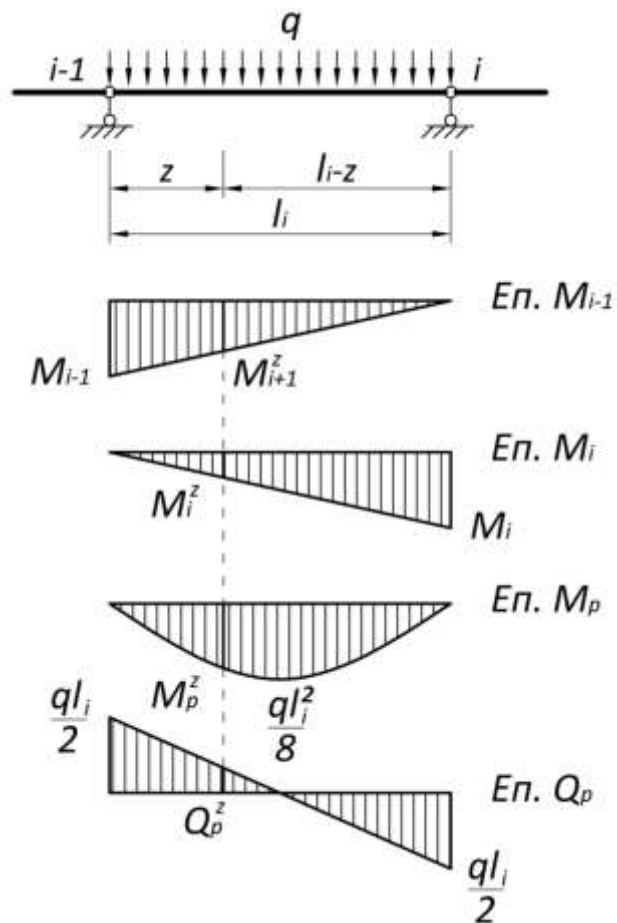


Рис. 12.5

Опорні реакції можуть бути обчислені виходячи з рівнянь рівноваги опорних в'язей (рис. 12.6):

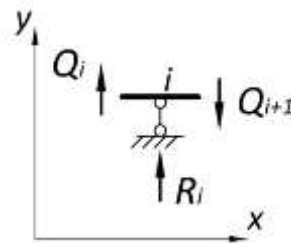


Рис. 12.6

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_i = Q_{i+1} - Q_i, \quad (12.5)$$

де Q_{i+1} , Q_i – поперечні сили відповідно праворуч і ліворуч опори.

12.2. Розрахунок нерозрізної балки за методом моментних фокусів

Метод моментних фокусів безпосередньо впливає з розрахунку за допомогою рівнянь трьох моментів нерозрізних балок, у яких навантажено лише один прогін. Розглянемо таку балку (рис. 12.7, а).

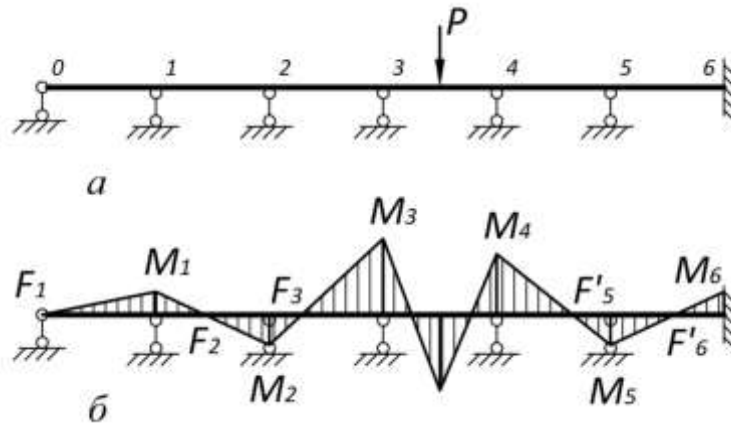


Рис. 12.7

Епюра згинальних моментів, одержана завдяки розрахунку, побудована на рис. 12.7, б. З аналізу цієї епюри можна дійти таких висновків:

- в міру віддалення від завантаженого прогону опорні моменти зменшуються за значенням;
- на кожному ненавантаженому прогоні епюра M прямолінійна і перетинає вісь балки, тобто має нульову точку. Цю точку називають **моментним фокусом** такого прогону.

Залежно від розташування навантаження щодо такого прогону розрізняють **ліві** і **праві моментні фокуси**.

Лівим фокусом називають нульову точку епюри M у ненавантаженому прогоні, якщо він розташований ліворуч від навантаженого прогону (точки F_1, F_2, F_3 на рис. 12.7, б).

Правим фокусом називають нульову точку епюри M у ненавантаженому прогоні, якщо він розташований праворуч від навантаженого прогону (точки F'_5, F'_6 на рис. 12.7, б).

Кожному фокусу відповідає деяке додатне число, яке називається **фокусним співвідношенням**. Воно характеризує співвідношення опорних моментів на кінцях цього ненавантаженого прогону. Так,

для фокуса F_1 (рис. 12.7, б) фокусне співвідношення $k_1 = -M_1/M_0 = \infty$, для фокусів F_2 і F_3 фокусні співвідношення $k_2 = -M_2/M_1$ і $k_3 = -M_3/M_2$. І взагалі, для довільного прогону l_i (рис. 12.8, а) ліве фокусне співвідношення

$$k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}}.$$

Величина фокусного співвідношення визначає розташування фокуса в прогоні балки. З рис. 12.8, а маємо

$$\frac{l_i - a_i}{a_i} = -\frac{M_i}{M_{i-1}} = k_i,$$

звідки відстань a_i виражається через фокусне співвідношення залежністю

$$a_i = \frac{l_i}{1 + k_i}.$$

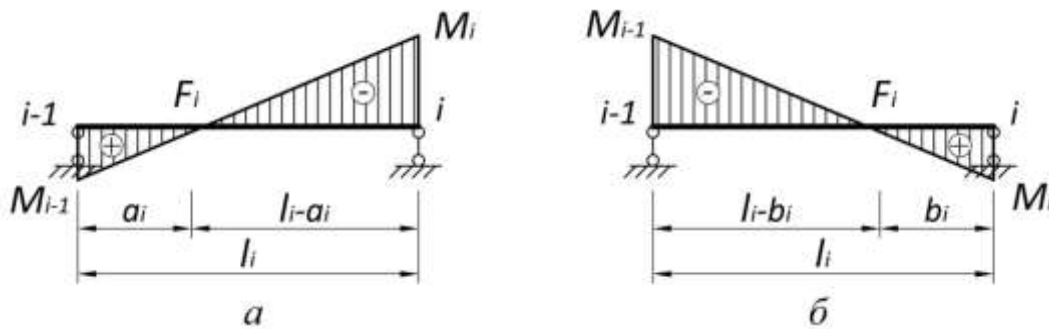


Рис. 12.8

Аналогічні залежності можна записати для правих фокусів. Так, для F'_5, F'_6 фокусні співвідношення мають вигляд: $k'_5 = -M_4/M_5$ і $k'_6 = -M_5/M_6$. В правому фокусі F'_i , довільного прогону l_i (рис. 12.8, б) відповідне фокусне співвідношення виражається формулою

$$k'_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i},$$

а відстань правого фокуса до правої опори прогону – формулою

$$b_i = \frac{l_i}{1 + k'_i}.$$

Для визначення величин фокусних співвідношень розглянемо яку-небудь нерозрізну балку (рис. 12.9).

Запишемо рівняння трьох моментів (12.2) по чергово для кожної проміжної опори.

Для опори 1 ($i=1$)

$$l'_1 M_0 + 2(l'_1 + l'_2) M_1 + l'_2 M_2 = -6 \left(\frac{l'_1}{l_1} B_1^\Phi + \frac{l'_2}{l_2} A_2^\Phi \right).$$

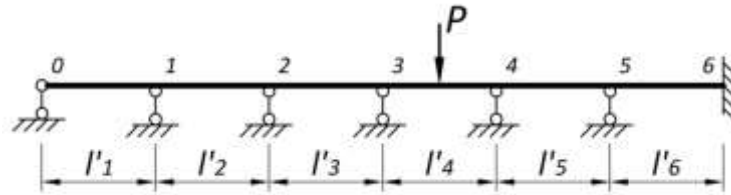


Рис. 12.9

Оскільки в прогонах l_1 і l_2 відсутнє зовнішнє навантаження, то фіктивні опорні реакції $B_1^\Phi = A_2^\Phi = 0$. Також дорівнює нулю опорний момент на крайній опорі $M_0 = 0$.

Зрештою маємо

$$2(l'_1 + l'_2) M_1 + l'_2 M_2 = 0,$$

звідки запишемо

$$-\frac{M_2}{M_1} = \frac{2(l'_1 + l'_2)}{l'_2} = k_2 = \text{const.}$$

Для опори 2 ($i=2$)

$$l'_2 M_1 + 2(l'_2 + l'_3) M_2 + l'_3 M_3 = 0.$$

Тут враховано, що зовнішнє навантаження в прогонах l_2 і l_3 відсутнє. Після нескладних перетворень маємо:

$$-\frac{M_3}{M_2} = 2 + \frac{l'_2}{l'_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right) = k_3 = \text{const.}$$

Продовжуючи такі самі записи для наступних опор, можемо зрештою записати ліве фокусне співвідношення для довільного прогону i у вигляді

$$k_i = 2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k_{i-1}} \right). \quad (12.6)$$

Аналогічну формулу можна одержати і для правих фокусних співвідношень:

$$k'_i = 2 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right). \quad (12.7)$$

Необхідно звернути увагу на те, що фокусні співвідношення залежать тільки від фізико-геометричних характеристик балки і не залежать від розташування, характеру і величини навантаження. Звідси випливає, що й точки моментних фокусів також не залежать від навантаження і являють собою деякі константи нерозрізної балки.

Формула (12.6) дає змогу обчислити фокусне співвідношення в прогоні l_i , якщо відоме фокусне співвідношення в попередньому прогоні l_{i-1} , а для обчислення правого фокусного співвідношення за формулою (12.7) потрібно мати співвідношення у прогоні l_{i+1} . Таким чином обчислення лівих фокусних співвідношень необхідно розпочинати з лівого, а правих – з правого кінця балки. Крім того, необхідно знати ліве фокусне співвідношення у крайньому лівому і праве фокусне співвідношення у крайньому правому прогоні, які залежать від виду крайньої опори. Ці величини зображені на рис. 12.10.

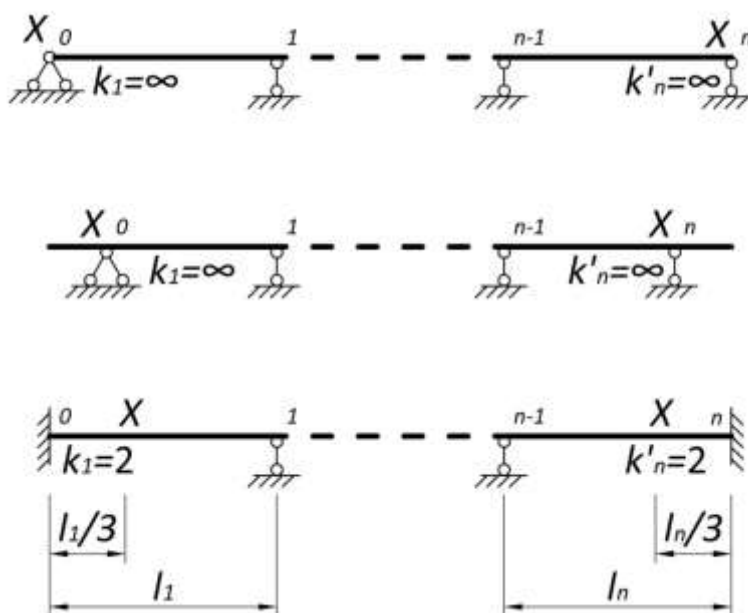


Рис. 12.10

Для розрахунку нерозрізної балки за методом моментних фокусів необхідно також визначити опорні моменти на кінцях наванта-

женого прогону. З цією метою розглянемо фрагмент балки, який містить цей прогін (рис. 12.11), разом з очікуваною епюрою згинальних моментів.

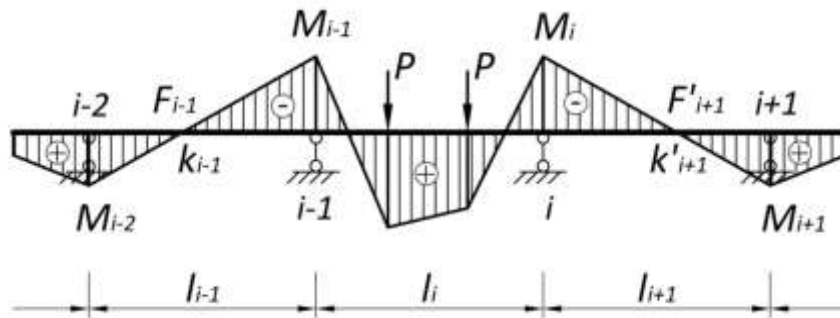


Рис. 12.11

Запишемо рівняння трьох моментів для опор на кінцях навантаженого прогону.

Опора $i-1$:

$$l'_{i-1}M_{i-2} + 2(l'_{i-1} + l'_i)M_{i-1} + l'_iM_i = -6 \left(\frac{l'_i}{l_i} A_i^\Phi \right).$$

Тут враховано, що внаслідок відсутності навантаження в прогоні l_{i-1} фіктивна реакція $B_{i-1}^\Phi = 0$.

Опора i :

$$l'_iM_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1})M_i + l'_{i+1}M_{i+1} = -6 \left(\frac{l'_{i+1}}{l_{i+1}} B_i^\Phi \right).$$

Тут враховано, що внаслідок відсутності навантаження в прогоні l_{i+1} фіктивна реакція $A_{i+1}^\Phi = 0$.

Ще два рівняння дістанемо виходячи з фокусних співвідношень у ненавантажених прогонах:

$$-\frac{M_{i-1}}{M_{i-2}} = k_{i-1}, \quad -\frac{M_i}{M_{i+1}} = k'_{i+1}.$$

Розв'язавши чотири рівняння відносно опорних моментів на кінцях навантаженого прогону, зрештою маємо

$$M_{i-1} = -\frac{6}{l_i} \cdot \frac{A_i^\Phi k'_i - B_i^\Phi}{k_i k'_i - 1}; \quad (12.8)$$

$$M_i = -\frac{6}{l_i} \cdot \frac{B_i^\phi k_i - A_i^\phi}{k_i k'_i - 1}. \quad (12.9)$$

Отже, може бути запропонована така процедура розрахунку нерозрізної балки:

- обчислити фокусні співвідношення за формулами (12.6) і (12.7);
- визначити опорні моменти на лівому і правому кінцях навантаженого прогону за формулами (12.8) і (12.9);
- переміщуючись вліво відносно навантаженого прогону, обчислити опорні моменти на наступних опорах через ліві фокусні співвідношення ($M_j = -M_{j+1}/k_{j+1}$);
- переміщуючись вправо відносно завантаженого прогону, обчислити опорні моменти на наступних опорах через праві фокусні співвідношення ($M_j = -M_{j-1}/k'_j$);
- за формулами (12.3)–(12.5) визначити внутрішні зусилля в прогонах балки і опорні реакції.

Контрольні запитання

1. Яку балку називають нерозрізною?
2. Як здійснюється розрахунок нерозрізної балки з використанням рівнянь трьох моментів?
3. Що потрібно виконати, щоб перейти до стандартної схеми розрахунку методом рівнянь трьох моментів?
4. Як здійснюється розрахунок нерозрізної балки за методом моментних фокусів?
5. Що називають лівим та правим моментним фокусом, фокусним співвідношенням?

Лекція 13

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Метод переміщень був розроблений і впроваджений у практику пізніше за метод сил. Втім він набув більшого поширення при «ручному» (без застосування комп'ютерних програм) розрахунку споруд завдяки простоті та меншій трудомісткості обчислень для значної кількості досліджуваних об'єктів.

Метод переміщень передбачає першочергове обчислення певного набору переміщень, знання яких дає змогу одержати зусилля і переміщення в усіх елементах конструкції. Це стає можливим тому, що напружено-деформований стан стержневого однозв'язного елемента цілком визначається прикладеним до нього навантаженням і переміщеннями перерізів, у яких цей елемент приєднується до інших частин споруди. Проте для статично невизначуваних елементів означену залежність необхідно визначити заздалегідь.

Існують дві форми реалізації метода переміщень – канонічна і розгорнута.

13.1. Припущення методу переміщень

Метод переміщень ґрунтується на спрощуючих припущеннях, від яких залежить кількість основних невідомих методу:

1. Кути між стержнями, які збігаються у жорсткому вузлі, не змінюються після деформування споруди. Це означає, що під час деформування кінці всіх стержнів, з'єднаних між собою припайками, повертаються на однаковий кут.
2. Для стержнів, що згинаються, деформаціями від поздовжніх і поперечних сил можна знехтувати.
3. Зближення кінців стержня після його згину не береться до уваги.
4. Довжина проекції стержня на його початковий напрямок до і після деформації залишається незмінною.
5. Тангенси і синуси кутів нахилу стержнів, що виникають за рахунок деформацій системи, внаслідок малих величин дорівнюють самим кутам.

На рис. 13.1 наведено схему деформації рами, відповідну до викладених припущень. Кути між дотичними до стержнів, які з'єднуються у жорстких вузлах D і E , залишилися прямими. Проекції деформованих стержнів AD_1 , BE_1 і CF_1 на вертикаль, а D_1E_1 і E_1F_1 на горизонталь, тобто на їх початковий напрямок, дорівнюють довжині відповідних стержнів. Слід звернути увагу на те, що вузли D , E і F після деформації споруди не мають вертикальних переміщень, а їх горизонтальні переміщення однакові.

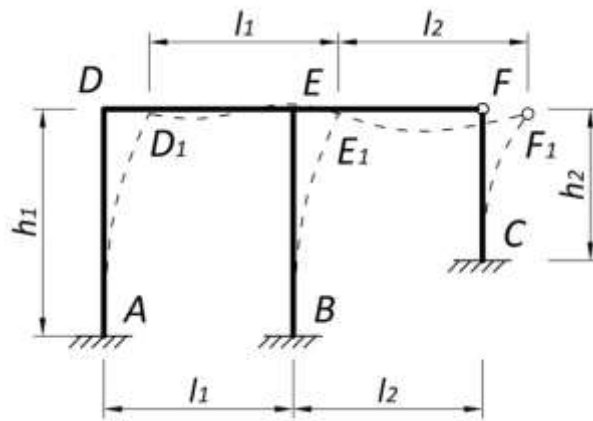


Рис. 13.1

Зазначимо також, що за викладеними припущеннями в методі переміщень однопрогонові балки, зображені на рис. 13.2, a , $б$, $в$, $г$, еквівалентні балкам на рис. 13.2, $д$, $е$, $ж$, $з$ відповідно.

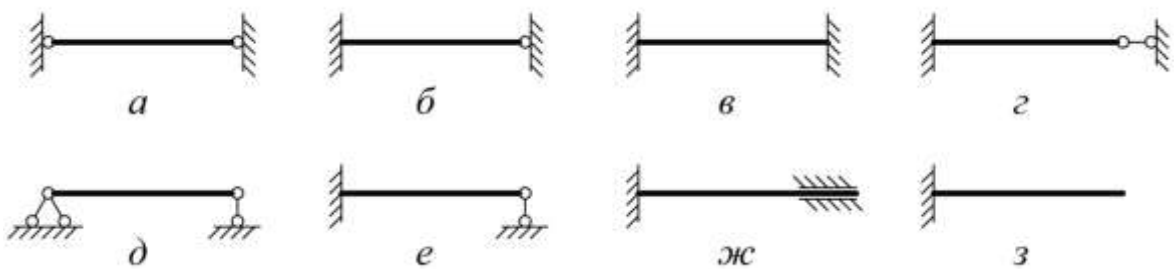


Рис. 13.2

13.2. Основна система методу переміщень

Розрахунок статично невизначуваної системи полягає в тому, що замість неї розглядається така створена на її основі система, розрахунок якої можна здійснити за допомогою вже відомих засобів. Така нова система називається **основною системою методу**.

Основним елементом споруди зручно вважати однопрогонову балку з будь-якими опорами на кінцях, для якої заздалегідь можна визначити напружено-деформований стан залежно від зовнішнього навантаження і переміщень її опор. Тому природно для одержання основної системи методом переміщень перетворити вихідну статично невизначувану систему в набір однопрогонових балок постійної жорсткості з нерухомими опорами, які не дають змоги кінцям балок мати кутові та поступальні переміщення. Для цього необхідно усунути можливість переміщень всіх вузлів системи. Цієї мети досягають введенням у вузли системи додаткових в'язей двох видів:

1. Для запобігання повороту всіх жорстких вузлів до них встановлюються так звані рухомі, або «плаваючі» затиснення. Це такі умовні в'язі, які не дають змогу вузлам повертатись, але не перешкоджають їх поступальним переміщенням.
2. Можливі поступальні переміщення вузлів системи виключаються встановленням *додаткових опорних стержнів*. Кількість таких стержнів має бути мінімальною, але достатньою для забезпечення нерухомості всіх стержнів системи.

Розглянемо приклад визначення кількості та положення додаткових опорних стержнів.

Шарнірна схема (рис. 13.3, б) системи (рис. 13.3, а) має нерухомі вузли A , B і C . Вузли D , E і F приєднані до них вертикальними стержнями, тобто не можуть мати вертикальних переміщень. Але у горизонтальному напрямку вони з'єднуються тільки між собою, не маючи прикріплення до якогось нерухомого вузла. Отже один із цих вузлів, наприклад вузол D , необхідно закріпити горизонтальним опорним стержнем. Тоді вузол D стає нерухомим і вузол E приєднується до нього і вузла B , а потім вузол F – до E і C відповідно парами стержнів DE і BE та EF і CF , які не лежать на одній прямій кожна. Отже вихідна система має одне незалежне поступальне переміщення.

В основних системах вихідні розрахункові схеми перетворюються у набори однопрогонових балок з нерухомими опорами.

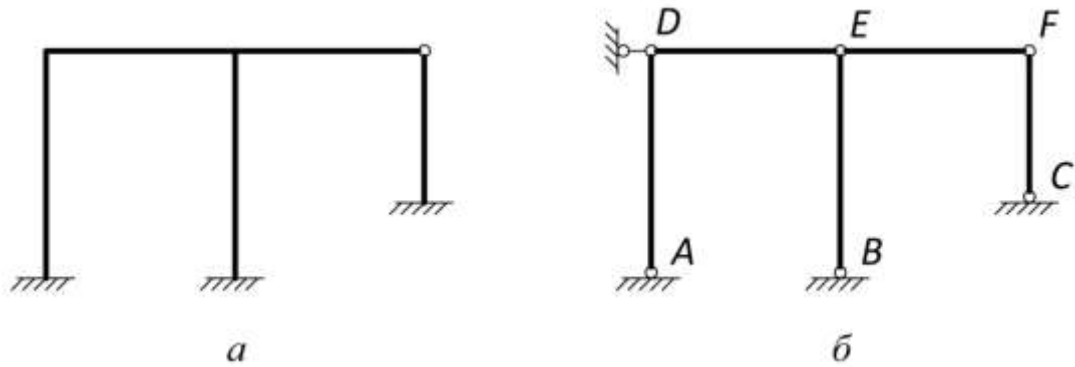


Рис. 13.3

Між вихідною статично невизначуваною розрахунковою схемою та її основною системою існують дві суперечності:

- жорсткі вузли вихідної конструкції можуть мати **кутові** та всі вузли – **поступальні** переміщення, можливість яких в основній системі усувається додатковими в'язями;
- у додаткових в'язях основної системи від навантаження виникають **реактивні сили**, яких немає у вихідній схемі через відсутність цих в'язей.

Перша з цих суперечностей усувається введенням **основних невідомих методу переміщень**, друга – використовується для складання **розв'язувальних рівнянь методу**.

13.3. Основні невідомі методу переміщень

Як вже зазначалось, вузли вихідної системи під час її навантаження мають переміщення, виключені в'язями, накладеними під час створення основної системи. Саме ці переміщення обираються як основні невідомі методу переміщень.

Отже, основними невідомими методу переміщень є **кути повороту** жорстких вузлів системи та **незалежні поступальні переміщення** її вузлів. Ці невідомі під час використання канонічної форми методу переміщень позначаються літерами Z_i ($i=1,2,3,\dots$).

Наприклад, основна система і основні невідомі методу переміщень для рами (рис. 13.3, а) зображені на рис. 13.4. Для зручності обчислень спочатку доцільно нумерувати невідомі кутові переміщення, а потім – поступальні, хоча принципово це не має значення.

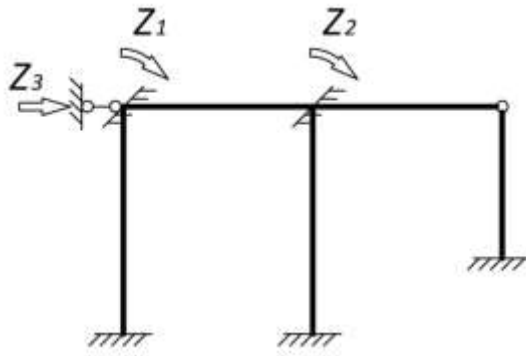


Рис. 13.4

Кількість основних невідомих методу переміщень називається **ступенем кінематичної невизначуваності системи**. Її можна визначити за формулою

$$k = k_{\varphi} + k_{\delta},$$

де k_{φ} – кількість кутових переміщень жорстких вузлів системи, яка дорівнює кількості проміжних жорстких вузлів заданої схеми; k_{δ} – кількість незалежних поступальних переміщень її вузлів, яка визначається з кінематичного аналізу шарнірної схеми.

Для системи, зображеної на рис. 13.3, а

$$k = 2 + 1 = 3.$$

Отже, **ступінь кінематичної невизначуваності** дорівнює мінімальній кількості додаткових в'язей, які повністю закріплюють вузли системи від можливих кутових і поступальних переміщень.

13.4. Канонічні рівняння методу переміщень

Для складання розв'язувальних рівнянь методу переміщень використовуємо другу суперечність між вихідною розрахунковою схемою та її основною системою. Вона полягає в тому, що в додаткових в'язях основної системи від навантаження виникають реактивні сили, яких немає у вихідній конструкції через відсутність цих в'язей. Отже, необхідно скласти математичні умови рівності нулю реакцій накладених в'язей.

Розглянемо тричі кінематично невизначувану систему (рис. 13.5, а). Її основна система і невідомі методу переміщень зображені на рис. 13.5, б. Для усунення відмін у деформаціях надамо додатковим в'язям

поки що невідомі переміщення вузлів і розглянемо окремі стани цієї основної системи, в кожному з яких на неї діє один фактор.

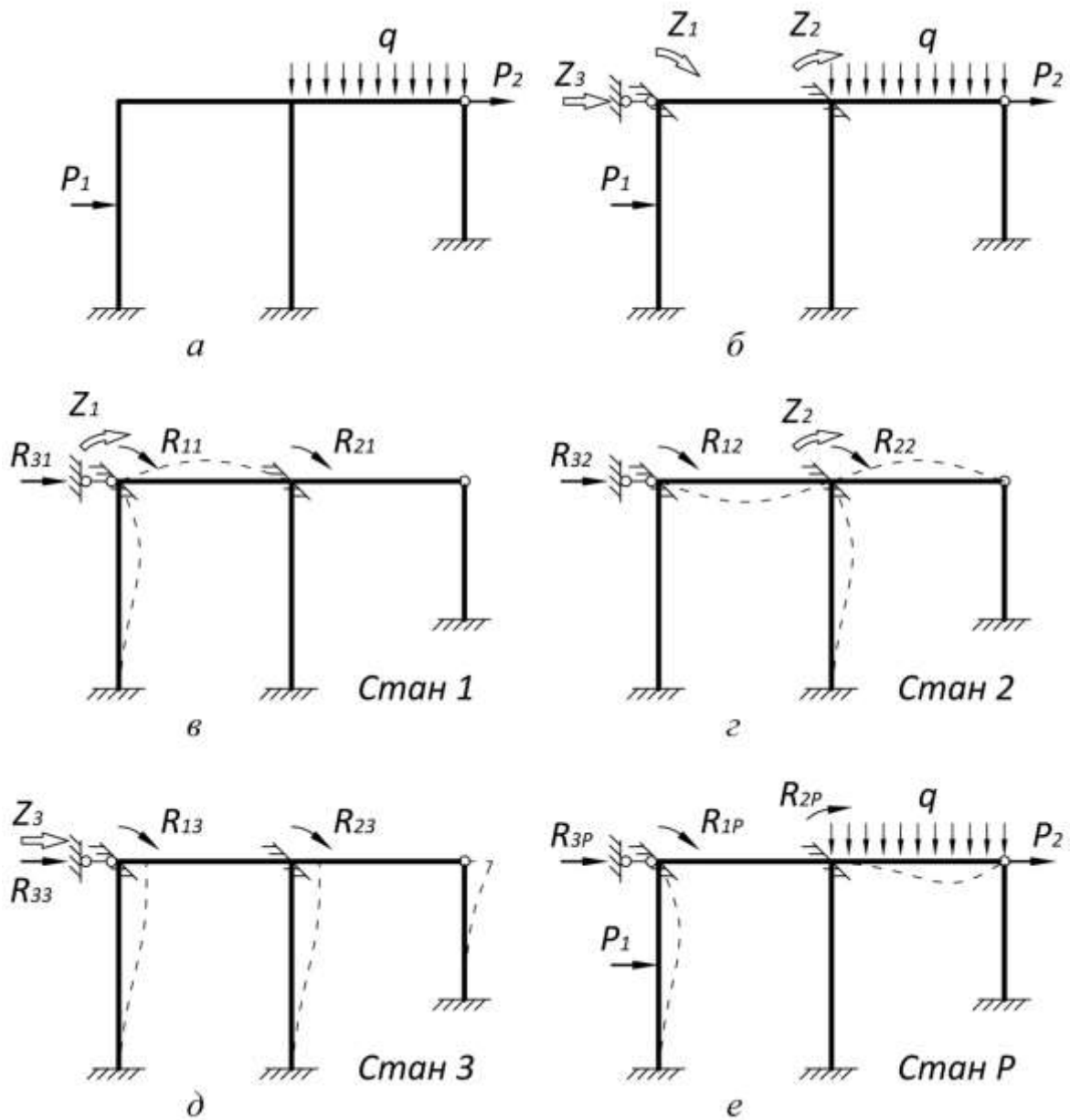


Рис. 13.5

У стані 1 (рис. 13.5, в) перший жорсткий вузол повертається разом із встановленим рухомим затисненням на кут, що дорівнює Z_1 , у стані 2 (рис. 13.5, г) другий жорсткий вузол повертається разом з встановленим рухомим затисненням на кут Z_2 , у стані 3 (рис. 13.5, д) вузли разом із встановленим додатковим опорним стержнем мають переміщення у його напрямку на величину Z_3 і, нарешті, у вантажному стані P на основну систему діє зовнішнє навантаження.

У кожному стані у всіх додаткових в'язях виникають реактивні сили. Введемо для цих реактивних сил позначення R_{ik} перший індекс i якого відповідає номеру додаткової в'язі, де виникає ця реакція, тобто номеру невідомого переміщення цієї в'язі, другий індекс k відповідає номеру стану, в якому виникає реакція. Ці реактивні сили зображені у відповідних станах основної системи на рис. 13.5, *в* – 13.5, *е*.

На підставі принципу суперпозиції сумарний реактивний момент у першому рухомому затисненні від усіх невідомих переміщень і зовнішнього навантаження дорівнює сумі відповідних реактивних моментів у всіх станах:

$$R_{1\Sigma} = R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{1P}.$$

Сумарний реактивний момент у другому рухомому затисненні від усіх невідомих переміщень і зовнішнього навантаження дорівнює сумі відповідних реактивних моментів у всіх станах:

$$R_{2\Sigma} = R_{21} + R_{22} + R_{23} + R_{2P}.$$

І нарешті сумарна реакція в додатковому опорному стержні (третій додатковій в'язі) від усіх невідомих переміщень і зовнішнього навантаження дорівнює сумі реакцій у всіх станах:

$$R_{3\Sigma} = R_{31} + R_{32} + R_{33} + R_{3P}.$$

Але у вихідній системі ці додаткові в'язі відсутні. Тому для еквівалентності напружено-деформованого стану основної системи і вихідної схеми прирівнюємо нулю сумарні реактивні сили у додаткових в'язях:

$$R_{1\Sigma} = 0, \quad R_{2\Sigma} = 0, \quad R_{3\Sigma} = 0.$$

Реактивні сили у додаткових в'язях від невідомого переміщення, що дорівнює одиниці, називають *одичними реактивними силами*. Введемо для них позначення r_{ik} . Тоді має місце співвідношення

$$R_{ik} = r_{ik} \cdot Z_k.$$

В підсумку маємо

$$\begin{aligned}
r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} &= 0, \\
r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} &= 0, \\
r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} &= 0.
\end{aligned}
\tag{13.1}$$

Кількість отриманих рівнянь дорівнює кількості додаткових в'язей, тобто *ступеню кінематичної невизначуваності системи*, яка, у свою чергу, дорівнює кількості основних невідомих методу переміщень. Сукупність залежностей (13.1) являє собою розв'язувальні рівняння методу переміщень.

Для n разів кінематично невизначуваної схеми розв'язувальні рівняння методу переміщень набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} &= 0; \\
r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} &= 0; \\
\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\
r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} &= 0.
\end{aligned}
\tag{13.2}$$

Фізичний зміст кожного з цих **рівнянь** полягає в тому, що **сумарна реактивна сила** у відповідній додатковій в'язі (реактивний момент у рухомому затисненні або реакція накладеного опорного стержня) основної системи від усіх невідомих поки що переміщень і зовнішнього навантаження дорівнює нулю.

Система розв'язувальних рівнянь методу переміщень може бути записана в матричному вигляді як

$$[r] \cdot \{Z\} + \{R\} = 0,$$

де $\{Z\} = \{Z_1 \quad Z_2 \quad \dots \quad Z_n\}^T$ – вектор основних невідомих,

$\{R\} = \{R_{1P} \quad R_{2P} \quad \dots \quad R_{nP}\}^T$ – вектор вантажних реакцій,

$[r]$ – матриця коефіцієнтів системи розв'язувальних рівнянь:

$$[r] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти r_{ii} (r_{11} , r_{22} , r_{33}), розташовані на головній діагоналі матриці коефіцієнтів системи рівнянь, називаються головними. Величини їх суттєво додатні. Коефіцієнти r_{ik} (r_{12} , r_{21} , r_{13} , r_{31} тощо) називаються побічними. Згідно з теоремою про взаємність реакцій побічні коефіцієнти, які розташовані симетрично відносно головної діагоналі, дорівнюють одне одному ($r_{ik}=r_{ki}$). Розв'язувальні рівняння (13.2) називаються **системою канонічних рівнянь методу переміщень**.

Для визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь необхідно мати епюри зусиль в основній системі методу переміщень в одиничних та вантажному станах.

13.5. Епюри зусиль в основній системі методу переміщень

Основна система методу переміщень являє собою набір однопрогонових балок, зображених на рис. 13.2. Балки на рис. 13.2, *д*, *з* і еквівалентні до них за припущеннями методу переміщень балки, які представлені на рис. 13.2, *а*, *г*, статично визначувані. Отже, епюри внутрішніх зусиль для таких елементів основної системи будуються просто.

Для побудови епюр в елементах, що становлять статично невизначувані балки, показані на рис. 13.2, *б*, *в* або еквівалентні до них на рис. 13.2, *е*, *ж*, необхідно заздалегідь визначити зусилля у таких балках від дії різних зовнішніх факторів. Ці розв'язки можна здобути різними способами.

Для прикладу розглянемо побудову епюр зусиль у статично невизначуваній балці постійної жорсткості з одним затисненим, а іншим шарнірно опертим кінцем від змушених переміщень опори шляхом інтегрування розв'язку диференціального рівняння рівноваги.

1) Поворот затиснення на одиничний кут (рис. 13.6, *а*).

У разі відсутності навантаження в прогоні рівняння прогинів балки має вигляд:

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3. \quad (13.3)$$

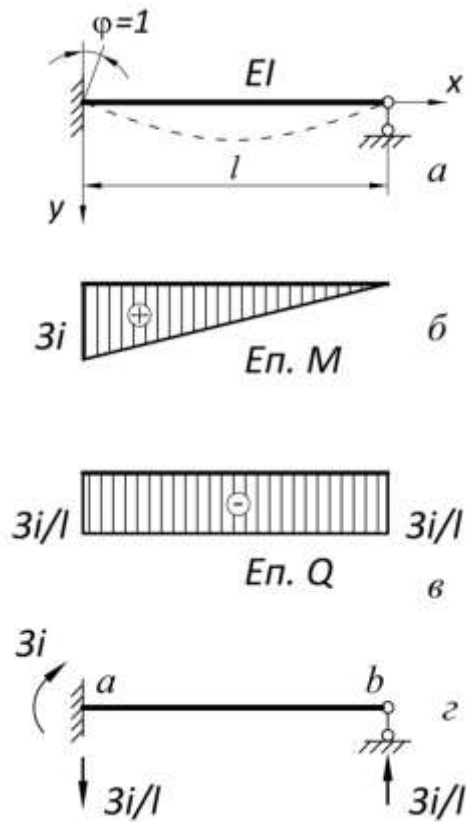


Рис. 13.6

Звідси можна записати:

$$\varphi(x) = \frac{dy(x)}{dx} = C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2;$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2y(x)}{dx^2} = -EI(2C_3 + 6C_4x); \quad (13.4)$$

$$Q(x) = -EI \frac{d^3y(x)}{dx^3} = -6EIC_4.$$

З граничних умов:

якщо $x=0$: $y(0)=C_1=0$; $\varphi(0)=C_2=\varphi$.

якщо $x=l$: $y(l)=C_1+C_2l+C_3l^2+C_4l^3=0$; $M(l)=-EI(2C_3+6C_4l)=0$.

Розв'язавши одержані рівняння знаходимо константи інтегрування:

$$C_1 = 0; C_2 = \varphi = 1; C_3 = -\frac{3}{2l}; C_4 = \frac{1}{2l^2},$$

звідки маємо рівняння розподілу згинальних моментів та поперечних сил:

$$M(x) = 3i \left(1 - \frac{x}{l}\right); Q(x) = -\frac{3i}{l}.$$

Епюри зусиль побудовано на рис. 13.6, б, в. На рис. 13.6, з показано реакції на кінцях балки.

Тут введено позначення *погонної жорсткості стержня*:

$$i = \frac{EI}{l}.$$

2) *Поступальне одиничне переміщення шарнірної опори* (рис. 13.7, а).

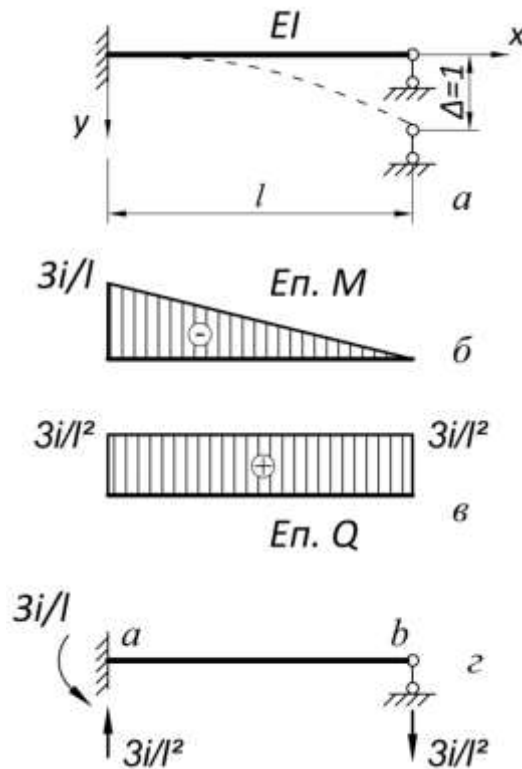


Рис. 13.7

Як і для попередньої задачі скористаємось співвідношеннями (13.3) та (13.4).

З граничних умов маємо:

якщо $x=0$: $y(0)=C_1=0$; $\varphi(0)=C_2=0$.

якщо $x=l$: $y(l)=C_1+C_2l+C_3l^2+C_4l^3=\Delta$; $M(l)=-EI(2C_3+6C_4l)=0$.

Розв'язавши одержані рівняння знаходимо константи інтегрування:

$$C_1 = 0; C_2 = 0; C_3 = \frac{3}{2l^2}; C_4 = \frac{1}{2l^3},$$

звідки маємо рівняння розподілу згинальних моментів та поперечних сил:

$$M(x) = \frac{3i}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right); Q(x) = \frac{3i}{l^2}.$$

Епюри зусиль побудовано на рис. 13.7, б, в. Реакції на кінцях балки показано на рис. 13.7, г.

Так само можна побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил від будь-якого навантаження. В дод. 2 посібника [1] наведено значення опорних (кінцевих) зусиль та епюри згинальних моментів для однопрогонових статично невизначуваних балок під час різних дій.

Одиничні та вантажні епюри для основної системи методу переміщень являють собою сукупність епюр в окремих балках, що складають цю систему, від переміщень їх опор або від дії місцевого навантаження. Побудова цих епюр від одиничних значень невідомих кутів повороту вузлів, тобто опор балок, та зовнішнього навантаження не викликає ускладнень. У разі ж, коли необхідно побудувати епюру від невідомого поступального переміщення вузлів, спочатку потрібно з'ясувати, опори яких стержнів основної системи і на яку саме величину переміщуються за одиничного значення відповідного невідомого. Це зручно виконати за допомогою *картини перекосів шарнірної схеми рами*.

Картину перекосів від одиничного невідомого поступального переміщення можна дістати, розглядаючи шарнірну схему з додатково накладеними опорними стержнями, що були введені для перетворення її на геометрично незмінювану систему.

Накладеному опорному стержню необхідно надати примусове одиничне переміщення в напрямі відповідного невідомого поступального переміщення і визначити переміщення всіх вузлів і нові по-

ложення стержнів. Якщо всі стержні, що отримують перекоси, паралельні, картина перекосів будується за допомогою простих міркувань.

Наприклад, для побудови картини перекосів шарнірної схеми, наведеної на рис. 13.3, б, від невідомого поступального переміщення $Z_3=1$ (рис. 13.4) потрібно перемістити у напрямку цього невідомого додатковий опорний стержень разом із вузлом D . Унаслідок незмінності довжини стержнів DE і EF вузли E і F матимуть таке саме переміщення, як і вузол D . За припущеннями методу переміщень відстань по вертикалі між вузлами A і D , B і E , C і F не змінюється. Тому вузли D , E і F не матимуть вертикальних переміщень. Отже, ми можемо одержати картину перекосів (рис. 13.8). Це свідчить, що у відповідному одиничному стані взаємне переміщення кінців мають стержні AD , BE і CF , і саме на цих стержнях буде епюра згинальних моментів.

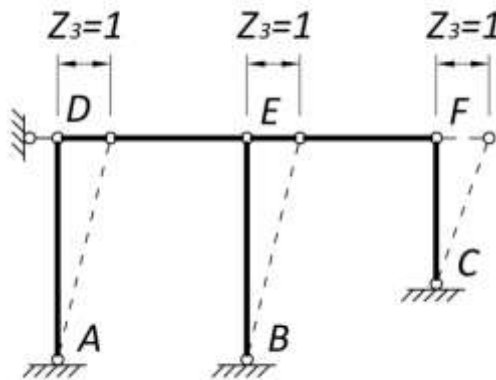


Рис. 13.8

Для систем, перекоси в яких одержують непаралельні між собою стержні, означена задача розв'язується за допомогою діаграми переміщень (діаграма Віллію).

На рис. 13.9, в, г, д, е побудовані одиничні та вантажна епюри згинальних моментів в основній системі методу переміщень (рис. 13.9, б) рами, зображеної на рис. 13.9, а.

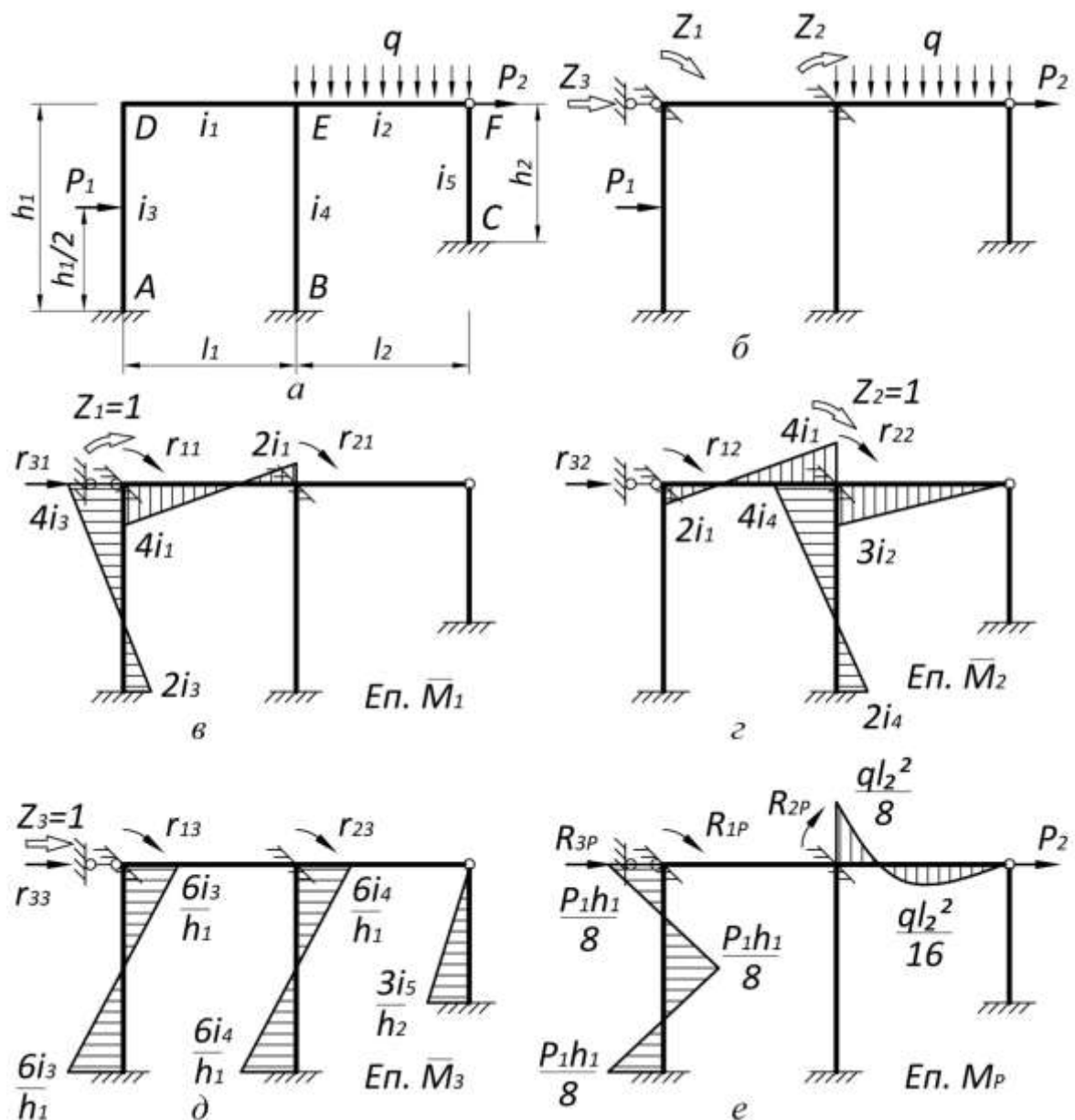


Рис. 13.9

13.6. Обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

Коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь *методу переміщень* визначаються виходячи з їхнього фізичного змісту. Нагадаємо, що коефіцієнт або вільний член являє собою реакцію, що виникає у відповідній додатковій в'язі основної системи від одного невідомого переміщення або від зовнішнього навантаження. Додатні напрямки реакцій збігаються з напрямками відповідних невідомих переміщень. Зазначені реакції поділяються на два види, що відрізняються за технологією їх обчислення. Це *реактивні момен-*

ти у введених рухомих затисненнях і *реакції* накладених опорних стержнів.

Для визначення *реактивних моментів* необхідно відокремити вузол основної системи разом із введеним рухомих затисненням. До вузла прикладається невідомий реактивний момент у рухомому затисненні, а також згинальні моменти в перерізах стержнів. Згинальні моменти одержують з епюр згинальних моментів відповідного одиничного або вантажного стану.

Так для рами на рис. 13.9, *а* коефіцієнт r_{11} – це реактивний момент у рухомому затисненні, накладеному на вузол D основної системи (рис. 13.9, *б*), від одиничного кута повороту $Z_1=1$, тобто в першому одиничному стані. Для його визначення відокремимо вузол D і прикладемо до нього реактивний момент і згинальні моменти у перерізах стержнів AD і DE , одержані з епюри згинальних моментів першого одиничного стану (рис. 13.9, *в*).

Складаємо рівняння рівноваги цього відокремленого вузла (рис. 13.10, *а*):

$$\sum M_D = r_{11} - 4i_1 - 4i_3 = 0,$$

звідки одержуємо $r_{11}=4i_1+4i_3$.

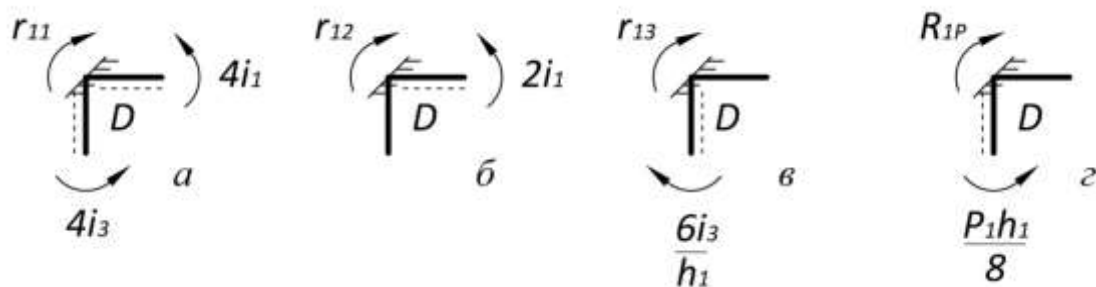


Рис. 13.10

Коефіцієнт r_{12} – це реактивний момент у рухомому затисненні, встановленому у вузлі D основної системи, від одиничного кута повороту $Z_2=1$, тобто у другому одиничному стані системи (рис. 13.9, *г*). Вирізаємо той самий вузол D (рис. 13.10, *б*) і складаємо рівняння його рівноваги:

$$\sum M_D = r_{12} - 2i_1 = 0,$$

звідки $r_{12}=2i_1$.

Коефіцієнт r_{13} – це реактивний момент у рухомому затисненні, накладеному на вузол D основної системи, від одиничного поступального переміщення $Z_3=1$, тобто у третьому одиничному стані системи (рис. 13.9, δ). Відокремлюємо той самий вузол D (рис. 13.10, ϵ) і складаємо рівняння його рівноваги:

$$\sum M_D = r_{13} + \frac{6i_3}{h_1} = 0 \Rightarrow r_{13} = -\frac{6i_3}{h_1}.$$

Вільний член R_{1P} – це реактивний момент у рухомому затисненні, встановленому у вузлі D основної системи, від зовнішнього навантаження, тобто у вантажному стані системи (рис. 13.9, ϵ). Знов відокремлюємо вузол D (рис. 13.10, ϵ) і складаємо рівняння його рівноваги:

$$\sum M_D = R_{1P} - \frac{Ph_1}{8} = 0 \Rightarrow R_{1P} = \frac{Ph_1}{8}.$$

На рис. 13.11 наведено вузол E , рівновагу якого слід розглянути для визначення коефіцієнтів і вільного члена другого рядка системи канонічних рівнянь, що являють собою реактивні моменти в рухомому затисненні, встановленому в цьому вузлі основної системи, від одиничних невідомих переміщень і зовнішнього навантаження.

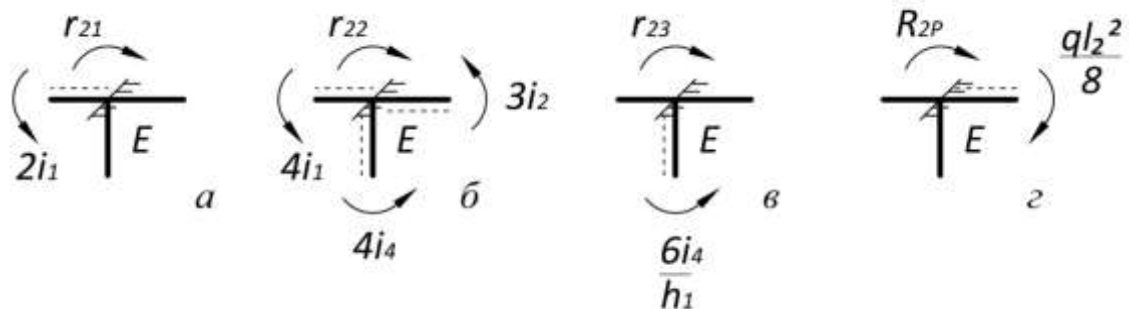


Рис. 13.11

З рис. 13.11, a : $\sum M_E = r_{21} - 2i_1 = 0, r_{21} = 2i_1.$

З рис. 13.11, δ : $\sum M_E = r_{22} - 4i_1 - 3i_2 - 4i_4 = 0, r_{22} = 4i_1 + 3i_2 + 4i_4.$

З рис. 13.11, ϵ : $\sum M_E = r_{23} + \frac{6i_4}{h_1} = 0, r_{23} = -\frac{6i_4}{h_1}.$

З рис. 13.11, ϵ : $\sum M_E = R_{2P} + \frac{ql_2^2}{8} = 0, R_{2P} = -\frac{ql_2^2}{8}.$

До другого виду коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь методу переміщень належать такі, що за фізичним змістом є силовими реакціями у додаткових опорних стержнях, введених під час створення основної системи. Для обчислення їх величини необхідно розглянути умови рівноваги відокремленого фрагмента основної системи.

Для визначення положення перерізу, що відокремлює потрібний фрагмент, зручно знову скористатися картиною перекосів шарнірної схеми. Переріз має проходити через додатковий стержень, в якому обчислюється реакція, а також через всі стержні основної системи, які зазнають перекося від примусового поступального переміщення у напрямку цього додаткового стержня. Зауважимо, що стержень доцільно перерізати нескінченно близько до одного з його кінців.

До відокремленого фрагмента потрібно прикласти всі сили, що діють на нього зокрема зусилля в перерізах. Поперечні сили в перерізах можна отримати з епюр згинальних моментів відповідного одиничного або вантажного стану, використовуючи диференціальну залежність Q від M ($Q=dM/ds$). Реакція у додатковому опорному стержні визначається з рівняння рівноваги у вигляді суми проекцій на вісь, яку краще вибирати так, щоб на неї не проектувалися невідомі поздовжні сили в перерізах.

Для прикладу обчислимо коефіцієнти r_{31} , r_{32} , r_{33} і вільний член R_{3P} системи канонічних рівнянь для розрахунку рами, зображеної на рис. 13.9, *a*.

Коефіцієнт r_{31} – це реакція накладеного опорного стержня від одиничного кута повороту $Z_1=1$, тобто в першому одиничному стані. Для його визначення перерізом, показаним на рис. 13.9, *б*, відокремлюємо фрагмент основної системи (рис. 13.12, *a*). До цього фрагмента прикладаємо реакцію перерізаного опорного стержня у напрямку, що збігається з напрямком невідомого переміщення Z_3 , та поперечні і поздовжні сили у перерізах стержнів AD , BE і CE . Величини і напрямки поперечних сил визначаємо за диференціальною залежністю від епюри згинальних моментів першого одиничного

стану \bar{M}_1 . Згинальні моменти на стержнях BE і CE відсутні, звідки випливає, що поперечні сили на цих стержнях також нульові. На стержні AD величина поперечної сили дорівнює тангенсу нахилу до стержня дотичної до епюри \bar{M}_1 , тобто $\frac{4i_3 + 2i_3}{h_1} = \frac{6i_3}{h_1}$, і вважається від'ємною, тому що епюра моментів відхиляється від напрямку стержня проти руху годинникової стрілки. Отже, прикладаємо поперечну силу у перерізі стержня так, щоби вона намагалася повернути стержень навколо вузла D проти руху годинникової стрілки. Величини поздовжніх сил та згинальних моментів не визначаємо через те, що вони не входять до необхідного рівняння рівноваги. Для визначення реакції r_{31} складаємо рівняння рівноваги фрагмента (рис. 13.12, *a*):

$$\sum F_x = \frac{6i_3}{h_1} + r_{31} = 0 \Rightarrow r_{31} = -\frac{6i_3}{h_1}.$$

Коефіцієнт r_{32} – це реакція накладеного опорного стержня від одиничного кута повороту $Z_2=1$, тобто у другому одиничному стані.

Для його визначення вирізаємо той самий фрагмент основної системи і прикладаємо до нього поперечні сили другого одиничного стану (рис. 13.12, *б*). Згинальний момент i , відповідно, поперечна сила є лише на одному перерізаному стержні BE .

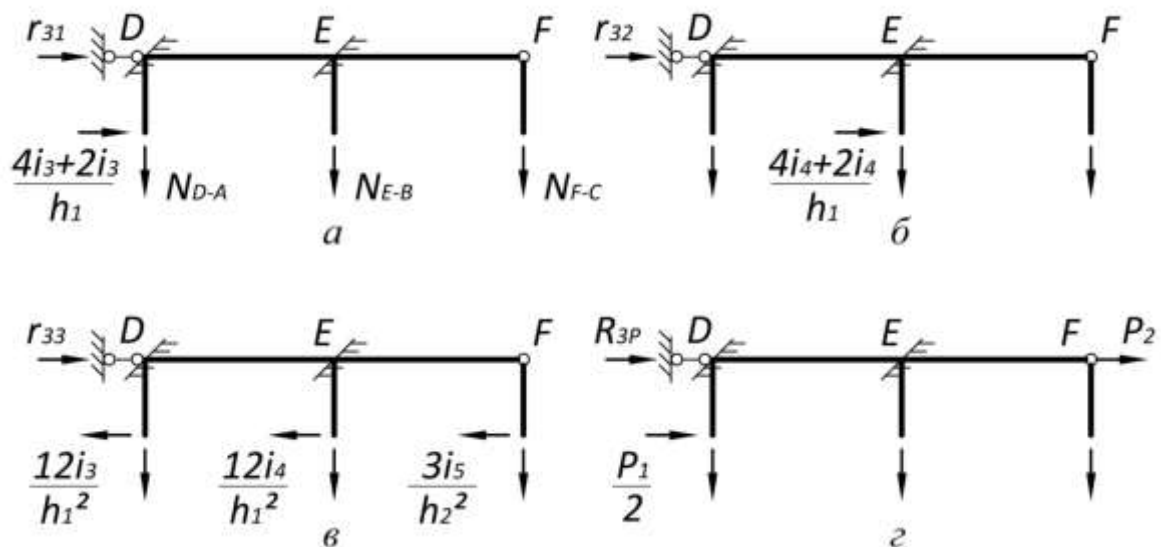


Рис. 13.12

Складаємо рівняння рівноваги фрагмента:

$$\sum F_x = \frac{6i_4}{h_1} + r_{32} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{32} = -\frac{6i_4}{h_1}.$$

Коефіцієнт r_{33} – це реакція накладеного опорного стержня від одиничного кута повороту $Z_3=1$, тобто у третьому одиничному стані.

Для його визначення вирізаємо той самий фрагмент основної системи і прикладаємо до нього сили третього одиничного стану (рис. 13.12, в). Згинальний момент i , відповідно, поперечні сили ϵ на трьох перерізаних стержнях AD , BE і CE . Складаємо рівняння рівноваги фрагмента:

$$\sum F_x = -\frac{12i_3}{h_1^2} - \frac{12i_4}{h_1^2} - \frac{3i_5}{h_2^2} + r_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{33} = \frac{12i_3}{h_1^2} + \frac{12i_4}{h_1^2} + \frac{3i_5}{h_2^2}.$$

Вільний член R_{3P} – це реакція накладеного опорного стержня основної системи від зовнішнього навантаження, тобто у вантажному стані. Знову відокремлюємо той самий фрагмент основної системи і прикладаємо до нього всі сили вантажного стану (рис. 13.12, г). Складаємо рівняння рівноваги фрагмента:

$$\sum F_x = \frac{P_1}{2} + P_2 + R_{3P} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{3P} = -\frac{P_1}{2} - P_2.$$

Підставимо визначені коефіцієнти і вільні члени в систему канонічних рівнянь:

$$\begin{aligned} 4(i_1 + i_3)Z_1 &+ 2i_1Z_1 && -\frac{6}{h_1}i_3Z_3 && + \frac{P_1h_1}{8} &= 0; \\ 2i_1Z_1 &+ (4(i_1 + i_3) + 3i_2)Z_2 && -\frac{6}{h_1}i_4Z_3 && - \frac{ql^2}{8} &= 0; \\ -\frac{6}{h_1}i_3Z_1 &- \frac{6}{h_1}i_4Z_2 && + \left(\frac{12(i_3 + i_4)}{h_1^2} + \frac{3i_5}{h_2^2} \right)Z_3 && - \frac{P_1}{2} - P_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ця система рівнянь на головній діагоналі має додатні коефіцієнти, побічні коефіцієнти є симетричними відносно головної діагоналі

і це може розглядатись як побіжна перевірка обчислення коефіцієнтів системи рівнянь.

Розв'язавши систему канонічних рівнянь, знайдемо основні невідомі методу переміщень.

13.7. Визначення дійсних зусиль

Маючи значення основних невідомих Z_1, Z_2, Z_n методу переміщень, одержаних в результаті розв'язання системи канонічних рівнянь, можна визначити дійсні згинальні моменти за способом накладання:

$$M_\delta = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p,$$

де $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ – згинальні моменти в одиничних станах основної системи; M_p – згинальні моменти у вантажному стані основної системи.

Дійсні поперечні сили можна також одержати способом накладання, якщо побудувати епюри поперечних сил в одиничних і вантажному станах. Але простіше визначити дійсні поперечні сили виходячи з їх диференціальної залежності від згинальних моментів:

$$Q_\delta = \frac{dM_\delta}{dx}.$$

Поздовжні сили визначають із рівноваги вузлів рами. З цією метою вирізаються вузли рами, до них прикладаються невідомі поздовжні та поперечні сили у перерізах стержнів, одержані з епюри Q_δ , а також зовнішні сили, що діють безпосередньо на вузол. Розв'язання рівнянь рівноваги дає змогу визначати невідомі N_δ . Послідовність вирізання вузлів має бути такою, щоб до кожного чергового вузла приєднувалось не більш ніж два стержні, поздовжні сили в яких ще не визначені.

Контрольні запитання

1. На яких припущеннях ґрунтується метод переміщень?
2. В чому полягає розрахунок статично невизначуваної системи методом переміщень?
3. Що необхідно здійснити для одержання основної системи методу переміщень?
4. З якою метою в розрахунковій схемі встановлюються рухомі, або «плаваючі» затиснення?
5. З якою метою в розрахунковій схемі встановлюються додаткові опорні стержні?
6. Що є основними невідомими методу переміщень?
7. Що називається ступенем кінематичної невизначуваності системи?
8. Який вигляд має система канонічних рівнянь методу переміщень?
9. Що є невідомими системи канонічних рівнянь методу переміщень?
10. Як називають коефіцієнти при невідомих у канонічних рівняннях методу переміщень? Що є вільними членами у цих рівняннях?
11. Як здійснюється обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь методу переміщень?
12. Як здійснюється визначення дійсних зусиль при розрахунку системи методом переміщень?

Лекція 14

РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Задачі опору матеріалів і будівельної механіки зазвичай формулюють у вигляді диференціальних рівнянь. Механічні або фізичні характеристики, такі як *переміщення, деформації, напруження* тощо, вважаються неперервними функціями координат. Фізичне тіло за такої умови уявляється сукупністю елементів нескінченно малих розмірів. З іншого боку, фізичне тіло можна розкласти на множину елементів скінченних розмірів і розглядати його як сукупність скінченних елементів. Такий підхід називають *методом скінченних елементів* (МСЕ). У стержневих системах за скінченні елементи беруться окремі стержні.

Скінченні елементи взаємодіють між собою у скінченному числі вузлових точок. *Переміщення, деформації та внутрішні зусилля* у перерізах стержня можуть бути виражені через *переміщення і реактивні сили* взаємодії на його кінцях. Поєднання скінченних елементів у єдину систему здійснюється шляхом складання рівнянь рівноваги для вузлів, до яких прикладаються реакції взаємодії скінченних елементів, які відповідають внутрішнім напруженням, що діють у місцях стиковки скінченних елементів з вузлами, а також зосереджені силові дії, що безпосередньо діють на вузли. Проте вважається, що кінці стержнів, які примикають до будь-якого вузла, переміщуються разом з цим вузлом, що забезпечує нерозривність деформацій стержневої системи.

Подібна ідеалізація вихідної пружної конструкції з нескінченним числом ступенів вільності дає змогу перейти до розгляду пружної системи зі скінченним їх числом.

Розрізняють методи скінченних елементів у *формі методу сил* і у *формі методу переміщень*. Під час виконання розрахунків за МСЕ у *формі методу сил* за основні невідомі, тобто ті, що обчислюються в першу чергу, покладаються *величини зусиль* у стержнях системи. Ці величини, а також переміщення вузлів визначаються із розв'язання повної системи рівнянь будівельної механіки. Метод

скінченних елементів у *формі методу переміщень* застосовується в тому разі, якщо за основні невідомі характеристики вузлів беремо їх поступальні та кутові переміщення. Саме такий підхід здебільшого застосовують у практичних розрахунках.

14.1. Основна ідея методу скінченних елементів

Основна ідея методу скінченних елементів полягає в тому, що конструкція представляється набором окремих фрагментів – *скінченних елементів*, які взаємодіють між собою в скінченній кількості точок – *вузлах*.

Напружено-деформований стан скінченно-елементної (дискретної) моделі конструкції характеризується переміщеннями та реакціями, визначеними у вузлах. Зусилля і переміщення у будь-якій точці скінченних елементів визначаються як функції вузлових переміщень.

Перший етап розрахунку стержневої системи за *методом скінченних елементів* полягає в *дискретизації*, тобто в переході від її розрахункової схеми до дискретної моделі. Вихідна розрахункова схема розбивається на окремі стержні (*скінченні елементи*) і *вузли*.

Стержневі скінченні елементи мають являти собою прямолінійні стержні постійної жорсткості, на яких може бути розташоване рівномірно розподілене зовнішнє навантаження. *Криволінійні стержні* апроксимуються декількома прямолінійними елементами. Аналогічно апроксимуються стержні, що мають *змінну жорсткість*, або ті, до яких прикладено *нерівномірно розподілене навантаження*.

Така схема споруди називається її *дискретною* або *скінченно-елементною моделлю* (СЕМ).

Вузлами дискретної моделі вважають точки:

- поєднання двох або понад окремих стержнів;
- ступінчастої зміни жорсткості стержнів;
- прикладення зосереджених зовнішніх сил або моментів;
- ступінчастої зміни інтенсивності розподіленого навантаження;
- опорні вузли.

14.2. Перехід до дискретної моделі

Перехід від розрахункової схеми до дискретної моделі показано на рис. 14.1.

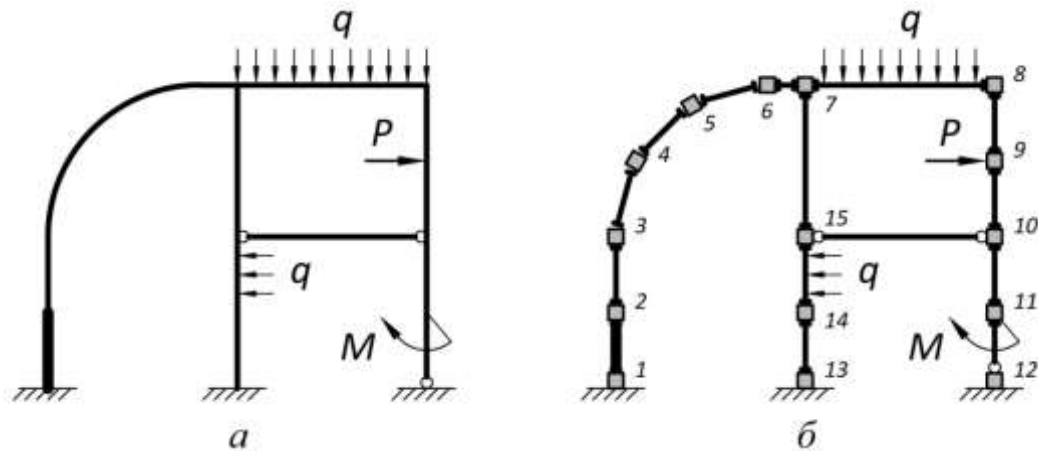


Рис. 14.1

Розрахункова схема рами (рис. 14.1, а) перетворена на СЕМ (рис. 14.1, б). Для позначення будь-якого скінченного елемента достатньо вказати номери вузлів, які він поєднує.

Для визначення взаємного розташування вузлів, їх кінематичних і статичних характеристик вводиться загальна для всього об'єкта система декартових координат xoy , яка називається **загальною** або **глобальною**.

Безпосередньо з кожним стержнем пов'язується його власна система координат $x'y'$, якою зручно користуватися для аналізу напружено-деформованого стану стержня. Така система координат називається **місцевою** або **локальною**. Початок локальної системи координат пов'язується з тим вузлом, що має менший номер. Цю точку називають **початком** стержня, а точку, яка розташована на протилежному кінці стержня – його **кінцем**. Вісь x' спрямовують вздовж стержня від його початку до кінця, а вісь y' – перпендикулярно до стержня, причому прямиий кут відкладається від осі x' проти руху годинникової стрілки (рис. 14.2).

На рисунку початок стержня позначено літерою i , а кінець – літерою j . Такі позначення будуть застосовуватися надалі.

Довжина стержня обчислюється через координати вузлів на початку та на кінці за формулою:

$$l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2},$$

де x_i, x_j, y_i, y_j – координати відповідних вузлів у глобальній системі координат.

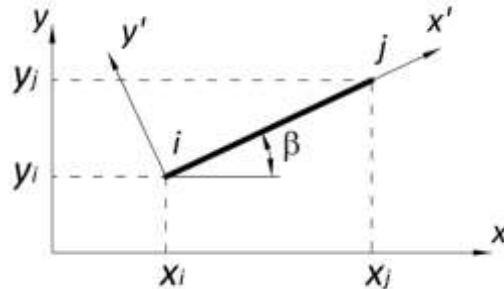


Рис. 14.2

Тригонометричні функції кута повороту β локальної системи координат стержня відносно глобальної системи координат усієї дискретної моделі можуть бути обчислені за формулами:

$$\sin \beta = \frac{y_j - y_i}{l}; \quad \cos \beta = \frac{x_j - x_i}{l}.$$

14.3. Типи скінченних елементів

У плоскій дискретній моделі можна виділити чотири типи скінченних елементів, які відрізняються граничними умовами, тобто способами примикання до вузлів:

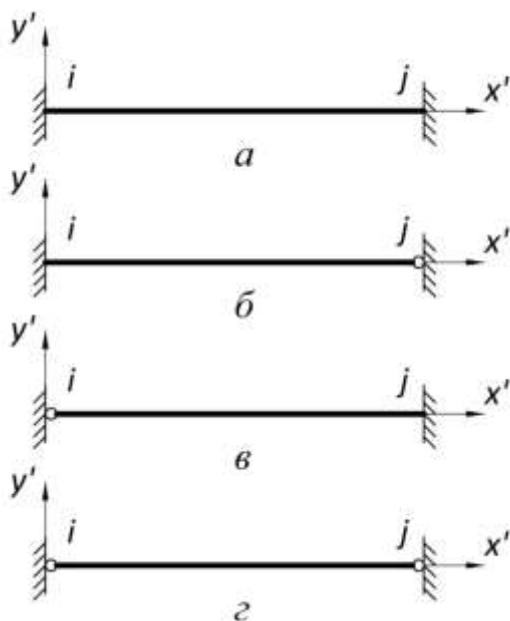


Рис. 14.3

- жорсткий вузол на початку і жорсткий вузол на кінці стержня (рис. 14.3, а);
- жорсткий вузол на початку і шарнірний вузол на кінці стержня (рис. 14.3, б);
- шарнірний вузол на початку і жорсткий вузол на кінці стержня (рис. 14.3, в);
- шарнірні вузли на початку і на кінці стержня (рис. 14.3, г).

14.4. Вузлові характеристики дискретної моделі

Вузли дискретної моделі можуть бути характеризовані із статичного і кінематичного погляду. Кінематичними характеристиками є *вузлові переміщення*, а статичними – *вузлові навантаження* і *вузлові реакції*.

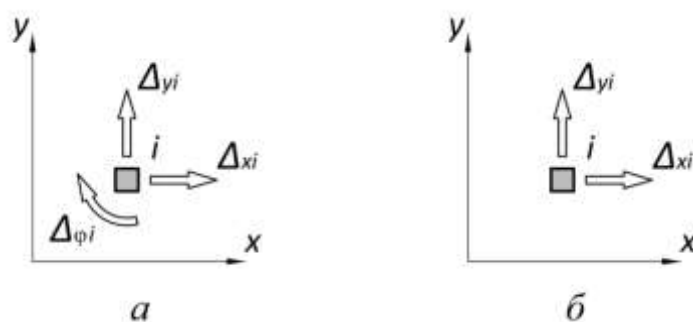


Рис. 14.4

Будь-який вільний жорсткий вузол i дискретної моделі має три ступені вільності, тобто можливість двох поступальних Δ_{xi} , Δ_{yi} і одного кутового переміщення $\Delta_{\phi i}$ цього вузла (рис. 14.4, *a*). Ці величини можуть бути записані у вигляді вектора

$$\vec{\Delta}_i = \{\Delta_{xi} \quad \Delta_{yi} \quad \Delta_{\phi i}\}^T.$$

Положення шарнірного вузла на площині характеризується тільки поступальними переміщеннями Δ_{xi} , Δ_{yi} (рис. 14.4, *б*). Тому шарнірний вузол має два ступені вільності і відповідно вектор переміщень такого вузла матиме дві компоненти:

$$\vec{\Delta}_i = \{\Delta_{xi} \quad \Delta_{yi}\}^T.$$

Сукупність усіх вузлових переміщень дискретної моделі (рис. 14.5, *б*) складає вектор вузлових переміщень:

$$\vec{\Delta} = \{\vec{\Delta}_1 \quad \vec{\Delta}_2 \quad \dots \quad \vec{\Delta}_i \quad \dots \quad \vec{\Delta}_7\}^T,$$

або

$$\vec{\Delta} = \{\Delta_{x1} \quad \Delta_{y1} \quad \Delta_{\phi1} \mid \Delta_{x2} \quad \Delta_{y2} \quad \Delta_{\phi2} \mid \dots \mid \Delta_{x7} \quad \Delta_{y7} \quad \Delta_{\phi7}\}^T.$$

Для практичних розрахунків зручно використовувати наскрізну

нумерацію компонентів вузлових переміщень у межах всієї моделі (рис. 14.5, б). Тоді вектор вузлових переміщень матиме

$$\vec{\Delta} = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \mid \Delta_4 \quad \Delta_5 \quad \Delta_6 \mid \dots, \mid \Delta_{18} \quad \Delta_{19} \quad \Delta_{20}\}^T$$

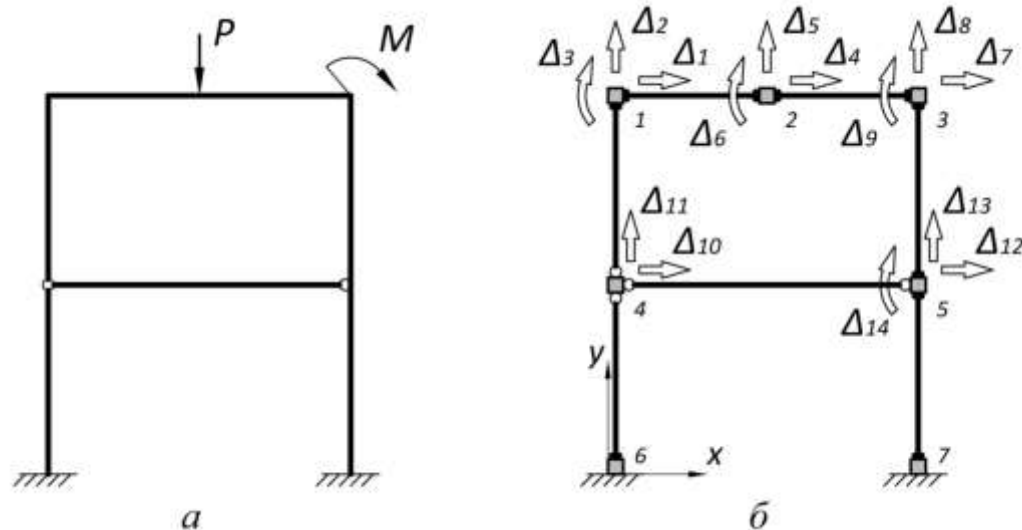


Рис. 14.5

Деякі переміщення вузлів можуть бути відомі з граничних умов задачі. Так, у цьому прикладі

$$\Delta_{15} = \Delta_{16} = \Delta_{17} = \Delta_{18} = \Delta_{19} = \Delta_{20} = 0.$$

Отже, невідомими є переміщення $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{14}$. Вектор $\vec{\Delta}$ після вилучення нульових елементів набуває остаточного вигляду:

$$\vec{\Delta} = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \mid \Delta_4 \quad \Delta_5 \quad \Delta_6 \mid \Delta_7 \quad \Delta_8 \quad \Delta_9 \mid \Delta_{10} \quad \Delta_{11} \mid \Delta_{12} \quad \Delta_{13} \quad \Delta_{14}\}^T$$

Компоненти вектора вузлових переміщень становлять основні невідомі методу скінченних елементів у формі методу переміщень. Їхня кількість характеризує кількість ступенів вільності дискретної моделі.

Статичною характеристикою вузлів дискретної моделі є **вузлові навантаження**. В кожному вузлі i припускається можливість дії трьох компонентів зовнішніх зосереджених силових дій: F_{xi} – сила, яка спрямована вздовж осі x загальної системи координат; F_{yi} – сила, яка діє вздовж осі y ; $F_{\phi i}$ – зосереджений момент. Сукупність зосереджених дій у жорсткому вузлі i може бути записана у вигляді

вектора:

$$\vec{F}_i = \{F_{xi} \quad F_{yi} \quad F_{\varphi i}\}^T,$$

а сукупність вузлових навантажень, які можуть діяти на всі вузли дискретної схеми (рис. 14.6, а), вектором

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \{\vec{F}_1 \quad \vec{F}_2 \quad \dots \quad \vec{F}_i \quad \dots \quad \vec{F}_7\}^T = \\ &= \{F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{\varphi 1} \mid F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{\varphi 2} \mid \dots \mid F_{x7} \quad F_{y7} \quad F_{\varphi 7}\}^T. \end{aligned}$$

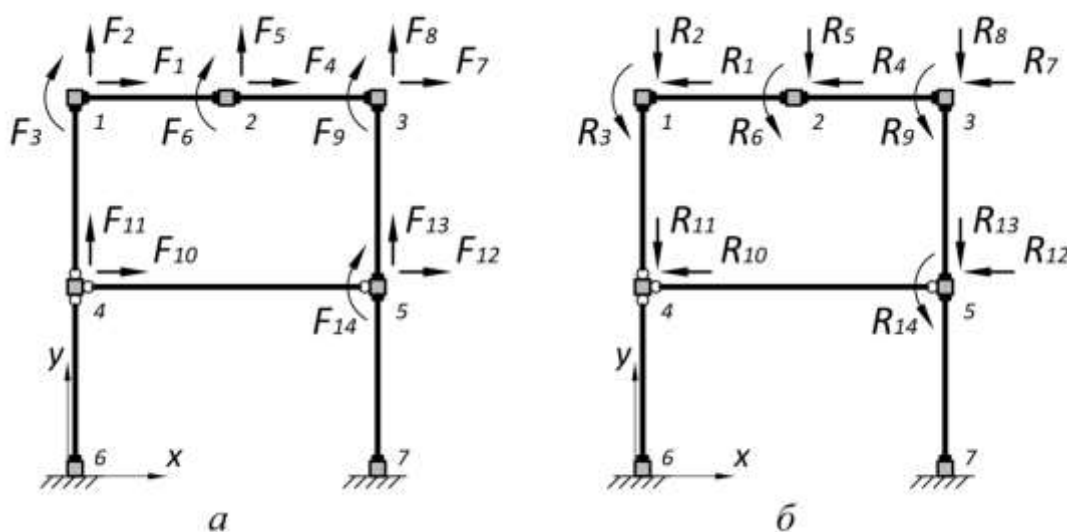


Рис. 14.6

Вектор \vec{F} можна представити як суму двох векторів:

$$\vec{F} = \vec{\bar{F}} + \vec{Q},$$

де $\vec{\bar{F}}$ – вектор зовнішніх сил, що безпосередньо діють на вузли, його компоненти дорівнюють відповідним зовнішнім силовим діям; \vec{Q} – вектор реактивних сил, що передаються на вузли з боку тих стержнів, на які діє розподілене навантаження. Компоненти цього вектора необхідно попередньо визначити, звівши розподілене на стержнях навантаження до вузлових сил.

У процесі розв’язання практичних задач компоненти зазначених векторів також мають наскрізну нумерацію, яка відповідає нумерації вузлових переміщень:

$$\vec{F} = \{F_1 \quad F_2 \quad F_3 \mid F_4 \quad F_5 \quad F_6 \mid F_7 \quad F_8 \quad F_9 \mid F_{10} \quad F_{11} \mid F_{12} \quad F_{13} \quad F_{14}\}^T;$$

$$\bar{F} = \{\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \bar{F}_3 \mid \bar{F}_4 \quad \bar{F}_5 \quad \bar{F}_6 \mid \bar{F}_7 \quad \bar{F}_8 \quad \bar{F}_9 \mid \bar{F}_{10} \quad \bar{F}_{11} \mid \bar{F}_{12} \quad \bar{F}_{13} \quad \bar{F}_{14}\}^T ;$$

$$\bar{Q} = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \mid Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \mid Q_7 \quad Q_8 \quad Q_9 \mid Q_{10} \quad Q_{11} \mid Q_{12} \quad Q_{13} \quad Q_{14}\}^T .$$

На шарнірний вузол (вузол ферми) можуть діяти дві компоненти зовнішніх навантажень, які дорівнюють проекціям зовнішніх сил, прикладених до вузла. Отже, для шарнірного вузла сукупність зосереджених дій у вузлі i може бути записана у вигляді вектора:

$$\bar{F}_i = \{F_{xi} \quad F_{yi}\}^T .$$

Ще одна статична характеристика вузлів – **вузлові реакції**. Під впливом зовнішніх дій вузли дискретної моделі переміщуються, а стержні, які їх поєднують, деформуються. Між вузлами і стержнями виникають реакції взаємодії, що зумовлені тільки переміщеннями вузлів. Сумарні реакції всіх стержнів, які приєднуються до вузла i , зобразимо у вигляді двох зосереджених сил, що орієнтовані вздовж осей глобальної системи координат всієї моделі, і зосередженого моменту. Позначимо ці реакції через R_{xi} , R_{yi} , $R_{\phi i}$.

Реакції, які передаються на вузол i з боку стержнів, і на стержні, що приєднуються до вузла, однакові за величиною, але спрямовані в протилежних напрямках. Зазвичай для реактивних сил, з якими вузли діють на стержні, за додатні приймають напрямки, які збігаються з додатними напрямками вузлових переміщень. Тоді реакції, які передаються на вузли з боку стержнів, будуть спрямовані у протилежних напрямках (рис. 14.6, б).

Сукупність реакцій для жорсткого вузла i можна записати у вигляді вектора:

$$\bar{R}_i = \{R_{xi} \quad R_{yi} \quad R_{\phi i}\}^T .$$

Якщо вузол шарнірний, то вектор вузлових реакцій має дві компоненти

$$\bar{R}_i = \{R_{xi} \quad R_{yi}\}^T .$$

Вузлові реакції всієї дискретної моделі утворюють вектор вузлових реакцій:

$$\bar{R} = \{\bar{R}_1 \quad \bar{R}_2 \quad \dots \quad \bar{R}_i \quad \dots \quad \bar{R}_n\}^T .$$

Розв'язуючи практичні задачі, використовують наскрізну нумерацію реакцій, причому їхні номери мають збігатися з номерами відповідних переміщень:

$$\vec{R} = \{R_1 \ R_2 \ R_3 \ | \ R_4 \ R_5 \ R_6 \ | \ R_7 \ R_8 \ R_9 \ | \ R_{10} \ R_{11} \ | \ R_{12} \ R_{13} \ R_{14}\}^T$$

14.5. Кінцеві характеристики стержневих скінченних елементів

У процесі деформування споруди її вузли i , отже, кінці стержнів переміщуються, внаслідок чого на кінцях виникають реакції взаємодії стержнів з вузлами скінченно-елементної моделі. Означені реакції і переміщення можуть бути визначені або у глобальній, або у локальній системі координат. На рис. 14.7, *a* зображено компоненти переміщень початку і кінця стержня, які орієнтовані за осями глобальної системи координат скінченно-елементної моделі.

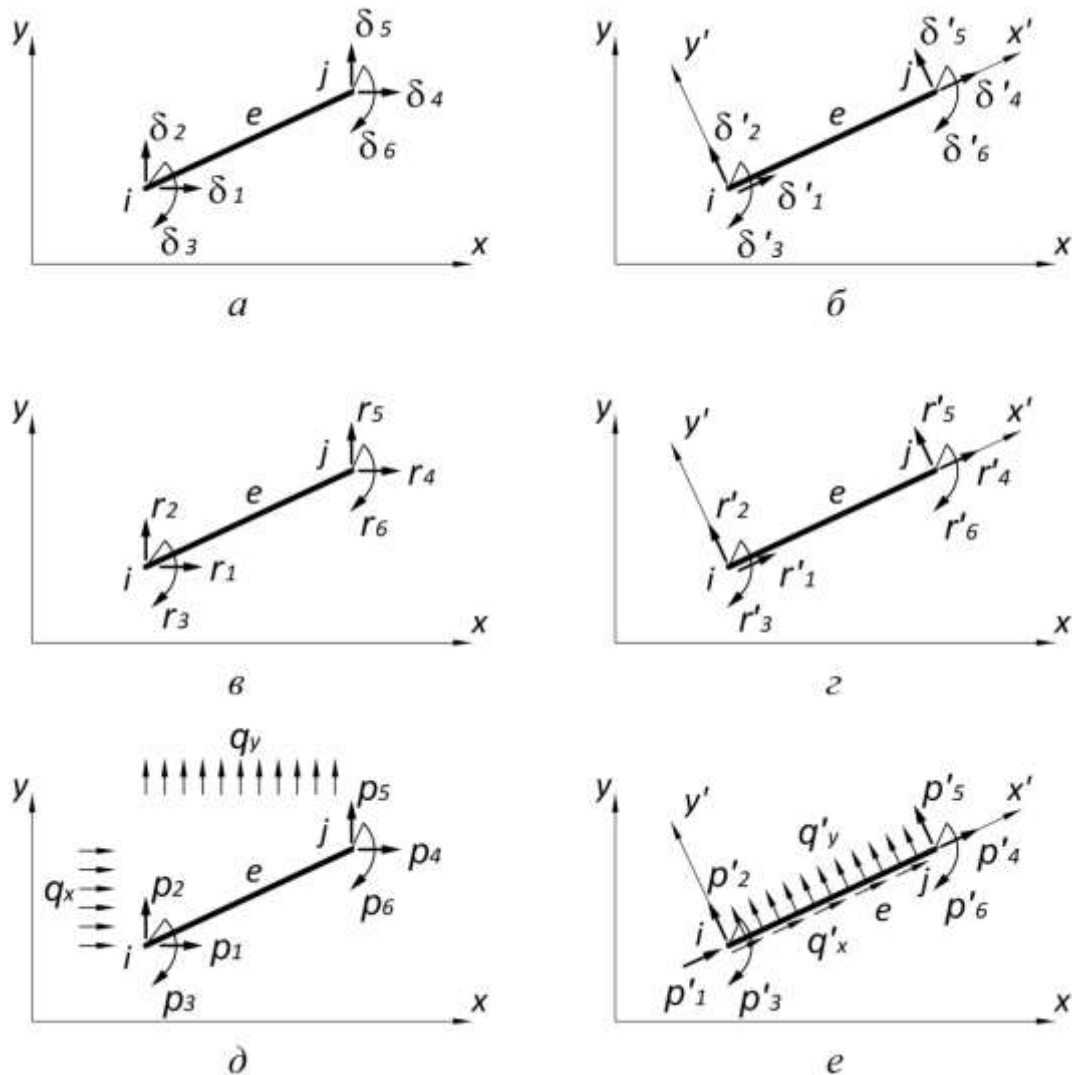


Рис. 14.7

Отже, переміщення початку стержня у глобальній системі координат можуть бути записані у вигляді матриці-стовпця (вектора)

$$\vec{\delta}_i = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}_i$$

або в транспонованій формі

$$\vec{\delta}_i^T = \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3\}_i.$$

Аналогічно можна подати вектор переміщень кінця стержня:

$$\vec{\delta}_j = \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}_j \quad \text{або} \quad \vec{\delta}_j^T = \{\delta_4 \quad \delta_5 \quad \delta_6\}_j.$$

Повний вектор кінцевих переміщень скінченного елемента у глобальній системі координат матиме вигляд

$$\vec{\delta}_e^T = \{\vec{\delta}_i \quad \vec{\delta}_j\}_e = \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \mid \delta_4 \quad \delta_5 \quad \delta_6\}_e.$$

На рис. 14.7, *в*, *д* зображено кінцеві реакції r , які зумовлені переміщеннями вузлів скінченно-елементної моделі, а також кінцеві вантажні реакції (кінцеві сили) p , зумовлені дією розподілених в межах стержня навантажень q_x і q_y . Нумерація компонентів кінцевих реакцій збігається з нумерацією відповідних кінцевих переміщень. Означені кінцеві реакції також подано у вигляді векторів

$$\vec{r}_e^T = \{\vec{r}_i \quad \vec{r}_j\}_e = \{r_1 \quad r_2 \quad r_3 \mid r_4 \quad r_5 \quad r_6\}_e,$$

$$\vec{p}_e^T = \{\vec{p}_i \quad \vec{p}_j\}_e = \{p_1 \quad p_2 \quad p_3 \mid p_4 \quad p_5 \quad p_6\}_e.$$

Кінцеві переміщення і реакції також можуть бути подані у вигляді компонентів, які являють собою проекції відповідних величин на осі локальної системи координат (рис. 14.7, *б*, *г*, *е*). Нумерація кінцевих реакцій також строго фіксована й аналогічна нумерації кінцевих переміщень у глобальній системі координат.

Кінцеві переміщення і кінцеві реакції у локальній системі координат також можуть бути представлені у вигляді векторів:

$$\bar{\delta}'^T_e = \{\bar{\delta}'_i \quad \bar{\delta}'_j\}_e = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad \delta'_3 \mid \delta'_4 \quad \delta'_5 \quad \delta'_6\}_e,$$

$$\bar{r}'^T_e = \{\bar{r}'_i \quad \bar{r}'_j\}_e = \{r'_1 \quad r'_2 \quad r'_3 \mid r'_4 \quad r'_5 \quad r'_6\}_e,$$

$$\bar{p}'^T_e = \{\bar{p}'_i \quad \bar{p}'_j\}_e = \{p'_1 \quad p'_2 \quad p'_3 \mid p'_4 \quad p'_5 \quad p'_6\}_e.$$

Розподілені на стержневому скінченному елементі навантаження, можуть бути орієнтовані за осями глобальної системи координат всієї скінченно-елементної моделі (рис. 14.8, а) або за осями локальної системи координат цього елемента (рис. 14.8, б).

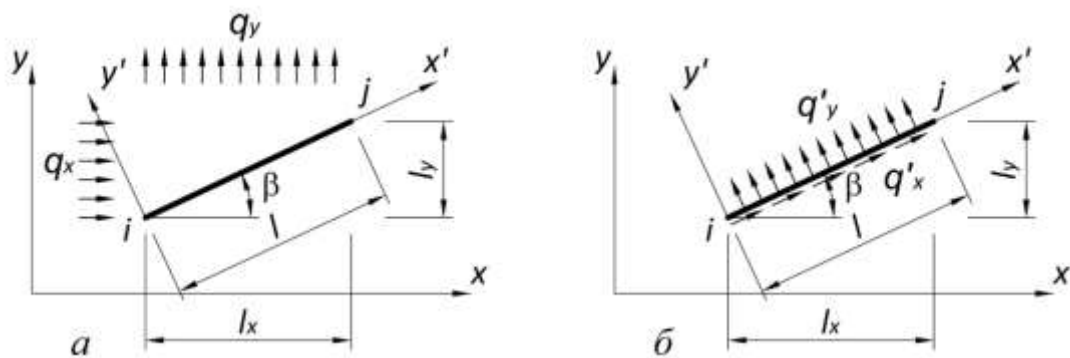


Рис. 14.8

Навантаження, відповідне глобальним осям координат, може бути перетворене у навантаження, відповідне локальній системі координат, за формулами

$$q'_x = \frac{q_x l_y}{l} \cos \beta + \frac{q_y l_x}{l} \sin \beta;$$

$$q'_y = -\frac{q_x l_y}{l} \sin \beta + \frac{q_y l_x}{l} \cos \beta.$$

Для зворотного переходу можна скористатися співвідношеннями

$$q_x = \frac{q'_x l}{l_y} \cos \beta - \frac{q'_y l}{l_y} \sin \beta;$$

$$q_y = \frac{q'_x l}{l_x} \sin \beta + \frac{q'_y l}{l_x} \cos \beta.$$

Лекція 15

РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

15.1. Матриця перетворення

Між кінцевими характеристиками у глобальній і локальній системах координат існує певний зв'язок. Розглянемо, наприклад, початок i стержня e (рис. 15.1).

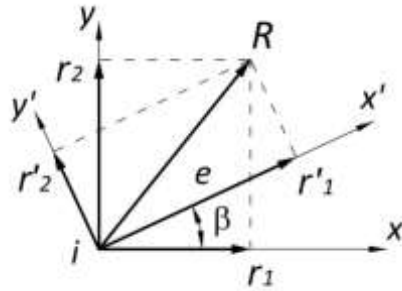


Рис. 15.1

Вектор рівнодіючої \vec{R} кінцевих реакцій розкладемо на дві складові за осями глобальної системи координат:

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2.$$

З іншого боку, ту саму рівнодіючу \vec{R} можна розкласти на складові за осями локальної системи координат:

$$\vec{R} = \vec{r}'_1 + \vec{r}'_2.$$

Отже

$$\vec{r}'_1 + \vec{r}'_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2.$$

Порівняємо проекції на осі x' і y' лівої і правої частин цієї рівності:

$$\sum F_{x'} \rightarrow r'_1 = r_1 \cdot \cos \beta + r_2 \cdot \sin \beta, \quad \sum F_{y'} \rightarrow r'_2 = r_1 \cdot \sin \beta + r_2 \cdot \cos \beta.$$

Очевидно, що величина кінцевого моменту від повороту координатних осей не залежить:

$$r'_3 = r_3.$$

Залежності, що знайдено, можуть бути подані в матричній формі

$$\begin{Bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \cdot \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix}_i$$

або у вигляді:

$$\vec{r}'_i = t_i \cdot \vec{r}_i,$$

де

$$t_i = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i.$$

Аналогічну залежність запишемо для кінця j стержня

$$\vec{r}'_j = t_j \cdot \vec{r}_j.$$

Для обох кінців стержня e маємо: $\vec{r}'_e = T_e \cdot \vec{r}_e$.

У цьому співвідношенні \vec{r}'_e , \vec{r}_e – вектори кінцевих реакцій відповідно у локальній і глобальній системах координат, T_e – матриця перетворення. Вона має вигляд

$$T_e = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_e.$$

Матриця T_e має такі властивості:

- 1) детермінант матриці дорівнює одиниці: $\text{Det} T_e = 1$;
- 2) обернена матриця збігається з транспонованою: $T_e^{-1} = T_e^T$, тобто

$$T_e \cdot T_e^T = T_e^T \cdot T_e = E,$$

де E – одинична матриця.

Матриці, які мають вказані властивості, називаються **ортогональними**.

Аналогічні залежності мають місце також для кінцевих переміщень та вантажних реакцій:

$$\vec{\delta}'_e = T_e \cdot \vec{\delta}_e, \quad \vec{p}'_e = T_e \cdot \vec{p}_e.$$

Очевидно, що справедливі й зворотні співвідношення:

$$\vec{r}_e = T_e^T \cdot \vec{r}'_e, \quad \vec{\delta}_e = T_e^T \cdot \vec{\delta}'_e, \quad \vec{p}_e = T_e^T \cdot \vec{p}'_e.$$

15.2. Матриця жорсткості скінченного елемента у локальній системі координат

Між кінцевими реакціями і кінцевими переміщеннями, які їх викликають, існує зв'язок. Для величин, що орієнтовані за осями локальної системи координат скінченного елемента, цей зв'язок може визначатися співвідношеннями:

$$\begin{aligned} r'_1 &= k'_{11}\delta'_1 + k'_{12}\delta'_2 + k'_{13}\delta'_3 + k'_{14}\delta'_4 + k'_{15}\delta'_5 + k'_{16}\delta'_6 \\ r'_2 &= k'_{21}\delta'_1 + k'_{22}\delta'_2 + k'_{23}\delta'_3 + k'_{24}\delta'_4 + k'_{25}\delta'_5 + k'_{26}\delta'_6 \\ r'_3 &= k'_{31}\delta'_1 + k'_{32}\delta'_2 + k'_{33}\delta'_3 + k'_{34}\delta'_4 + k'_{35}\delta'_5 + k'_{36}\delta'_6 \\ r'_4 &= k'_{41}\delta'_1 + k'_{42}\delta'_2 + k'_{43}\delta'_3 + k'_{44}\delta'_4 + k'_{45}\delta'_5 + k'_{46}\delta'_6 \\ r'_5 &= k'_{51}\delta'_1 + k'_{52}\delta'_2 + k'_{53}\delta'_3 + k'_{54}\delta'_4 + k'_{55}\delta'_5 + k'_{56}\delta'_6 \\ r'_6 &= k'_{61}\delta'_1 + k'_{62}\delta'_2 + k'_{63}\delta'_3 + k'_{64}\delta'_4 + k'_{65}\delta'_5 + k'_{66}\delta'_6 \end{aligned}$$

або в матричній формі

$$\vec{r}'_e = k'_e \cdot \vec{\delta}'_e.$$

де $\vec{r}'_e, \vec{\delta}'_e$ – вектори кінцевих реакцій і кінцевих переміщень стержня у локальній системі координат, k'_e – матриця жорсткості стержня у локальній системі координат.

$$k'_e = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} & k'_{15} & k'_{16} \\ k'_{21} & k'_{22} & k'_{23} & k'_{24} & k'_{25} & k'_{26} \\ k'_{31} & k'_{32} & k'_{33} & k'_{34} & k'_{35} & k'_{36} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & k'_{44} & k'_{45} & k'_{46} \\ k'_{51} & k'_{52} & k'_{53} & k'_{54} & k'_{55} & k'_{56} \\ k'_{61} & k'_{62} & k'_{63} & k'_{64} & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix}_e.$$

Будь-який коефіцієнт матриці жорсткості k'_{ij} являє собою кінцеву реакцію r'_i , яка зумовлена примусовим кінцевим переміщенням $\bar{\delta}'_j = 1$, за умови, що всі інші кінцеві переміщення дорівнюють нулю.

Існує кілька методів побудови матриці жорсткості стержневих елементів. Найпростішим є підхід, де коефіцієнти матриці визначають із розрахунку стержня на почергове змушене переміщення його кінців. З цією метою, наприклад, може бути запропоновано метод початкових параметрів. Однак, у складніших випадках, наприклад, для стержня у тривимірному просторі, такий спосіб використати практично неможливо. Загальний метод побудови матриць жорсткості будь-яких елементів, зокрема й для стержня на площині, ґрунтується на розгляді функціонала повної потенціальної енергії та умов його мінімуму.

15.3. Матриця жорсткості скінченного елемента у глобальній системі координат

Матриці жорсткості стержня у локальних системах координат визначають величини кінцевих реакцій, які орієнтовані за осями локальних систем координат. Під час розгляду сумарної дії стержнів на вузли скінченно-елементної моделі виникає необхідність привести всі ці реакції, що передаються на вузли з боку стержнів, до спільних напрямків. За ці напрямки доцільно обрати напрями осей глобальної системи координат всієї моделі. Отже, постає задача перетворення кінцевих реакцій стержня з локальної у глобальну систему координат, тобто задача побудови матриць жорсткості стержнів у глобальній системі координат.

Як відомо, між кінцевими реакціями і кінцевими переміщеннями стержня у локальній системі координат існує залежність:

$$\bar{r}'_e = k'_e \bar{\delta}'_e.$$

З іншого боку, кінцеві величини у локальній і глобальній системах координат пов'язані матрицею перетворення T_e . Якщо виразити кінцеві реакції \bar{r}'_e і кінцеві переміщення $\bar{\delta}'_e$, які спрямовані за ося-

ми локальної системи координат, через аналогічні величини у глобальній системі, одержимо:

$$T_e \vec{r}'_e = k'_e T_e \vec{\delta}'_e.$$

Помноживши ліворуч обидві частини рівності на обернену матрицю перетворень і зважаючи на те, що обернена матриця перетворень збігається з транспонованою, запишемо

$$\vec{r}_e = T_e^T k'_e T_e \vec{\delta}'_e.$$

Позначивши

$$k_e = T_e^T k'_e T_e,$$

врешті

$$\vec{r}_e = k_e \vec{\delta}_e. \quad (15.1)$$

Матриця k_e , що перетворює вектор кінцевих переміщень $\vec{\delta}_e$ у вектор кінцевих реакцій у глобальній системі координат \vec{r}_e , являє собою матрицю жорсткості у глобальній системі координат.

Матричний вираз (15.1) може бути представлений співвідношеннями:

$$\begin{aligned} r_1 &= k_{11}\delta_1 + k_{12}\delta_2 + k_{13}\delta_3 + k_{14}\delta_4 + k_{15}\delta_5 + k_{16}\delta_6 \\ r_2 &= k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{23}\delta_3 + k_{24}\delta_4 + k_{25}\delta_5 + k_{26}\delta_6 \\ r_3 &= k_{31}\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3 + k_{34}\delta_4 + k_{35}\delta_5 + k_{36}\delta_6 \\ r_4 &= k_{41}\delta_1 + k_{42}\delta_2 + k_{43}\delta_3 + k_{44}\delta_4 + k_{45}\delta_5 + k_{46}\delta_6 \\ r_5 &= k_{51}\delta_1 + k_{52}\delta_2 + k_{53}\delta_3 + k_{54}\delta_4 + k_{55}\delta_5 + k_{56}\delta_6 \\ r_6 &= k_{61}\delta_1 + k_{62}\delta_2 + k_{63}\delta_3 + k_{64}\delta_4 + k_{65}\delta_5 + k_{66}\delta_6 \end{aligned}$$

Отже, матриця жорсткості стержня у глобальній (загальній) системі координат має вигляд

$$k_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ \hline k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{array} \right]_e .$$

Будь-який коефіцієнт матриці k_{ij} являє собою кінцеву реакцію r_i , що спричинена дією змушеного одиничного кінцевого переміщення $\bar{\delta}_j = 1$. Водночас необхідно чітко усвідомлювати, що як кінцеві реакції, так і кінцеві переміщення орієнтовані за осями глобальної системи координат.

Позначення кінцевих реакцій від дії кожного одиничного кінцевого переміщення наведені на рис. 15.2.

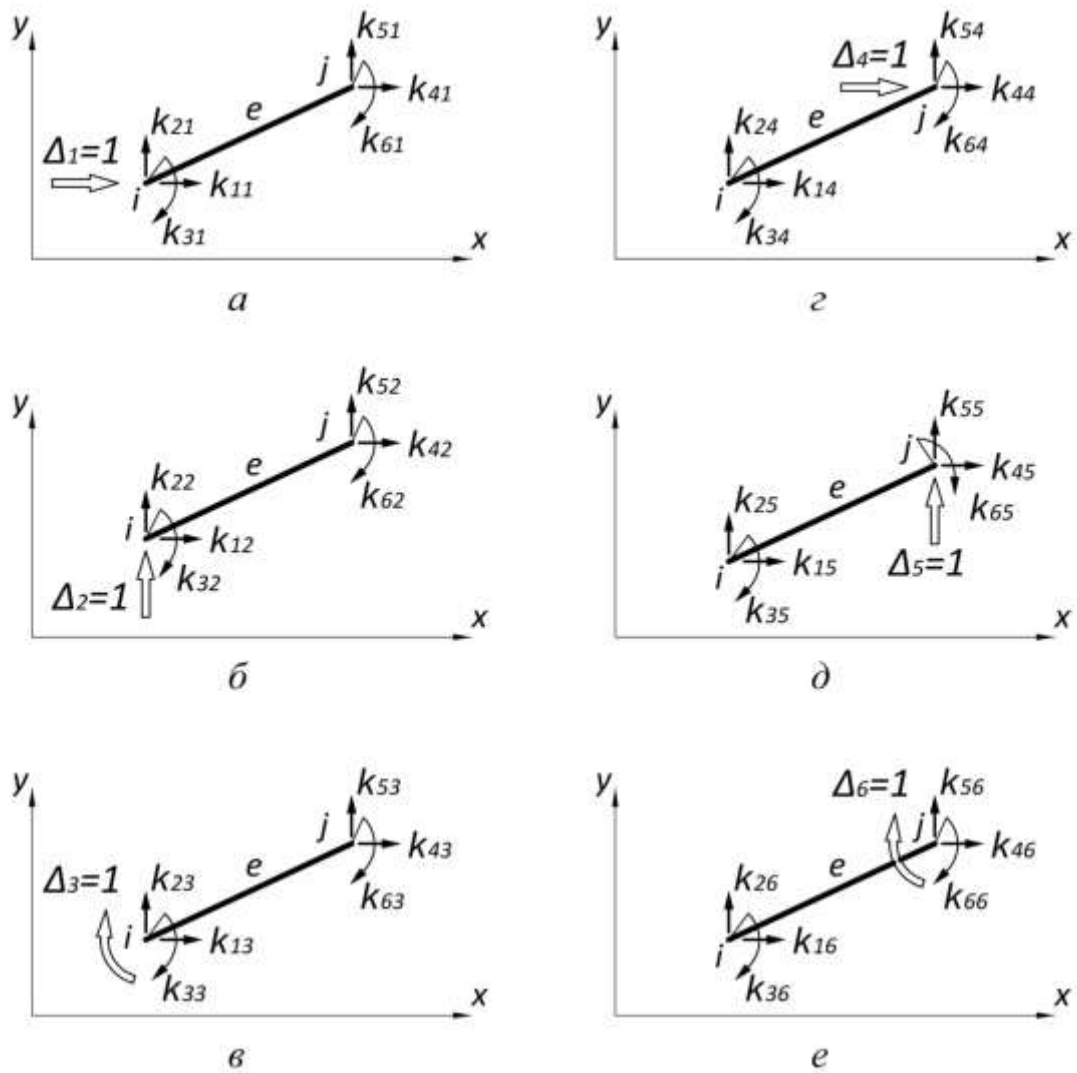


Рис. 15.2

15.4. Матриця жорсткості дискретної моделі

З умов рівноваги будь-якого вузла i (рис. 15.3) маємо:

$$\sum F_x = 0, \quad F_{xi} - R_{xi} = 0,$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{yi} - R_{yi} = 0,$$

$$\sum M = 0, \quad F_{\varphi i} - R_{\varphi i} = 0$$

або в матричній формі: $\vec{F}_i - \vec{R} = 0$.

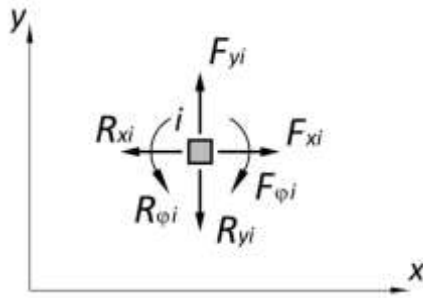


Рис. 15.3

Отже, для всіх вузлів скінченно-елементної моделі можна записати

$$\vec{F} - \vec{R} = 0$$

або

$$\vec{R} - \vec{F} = 0. \tag{15.2}$$

Вузлові реакції, що зумовлені переміщеннями вузлів, для лінійно-деформованих систем можуть бути представлені виразами:

$$\begin{aligned} R_1 &= K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 + \dots + K_{1n}\Delta_n, \\ R_2 &= K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 + \dots + K_{2n}\Delta_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ R_n &= K_{n1}\Delta_1 + K_{n2}\Delta_2 + \dots + K_{nn}\Delta_n. \end{aligned}$$

У матричній формі лінійне перетворення може бути записане у вигляді:

$$\vec{R} = K\vec{\Delta}, \tag{15.3}$$

де K – матриця жорсткості всієї скінченно-елементної (дискретної) моделі:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}.$$

Довільний коефіцієнт K_{ij} являє собою вузлову реакцію R_i , що спричинена вузловим переміщенням $\Delta_j=1$, за умови, що всі інші переміщення вузлів дорівнюють нулю.

Головні коефіцієнти матриці жорсткості являють собою додатні числа ($K_{ij} > 0$). Побічні коефіцієнти симетричні відносно головної діагоналі, тобто $K_{ij} = K_{ji}$. Підставивши (15.3) у рівняння рівноваги (15.2), одержимо:

$$K\vec{\Delta} - \vec{F} = 0. \quad (15.4)$$

Такі самі рівняння в координатній формі представлятимуться співвідношеннями:

$$\begin{aligned} K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 + \dots + K_{1n}\Delta_n + F_1 &= 0, \\ K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 + \dots + K_{2n}\Delta_n + F_2 &= 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ K_{n1}\Delta_1 + K_{n2}\Delta_2 + \dots + K_{nn}\Delta_n + F_n &= 0. \end{aligned}$$

Невідомими в рівняннях є переміщення вузлів, коефіцієнти – величини вузлових реакцій, вільні члени – вузлові навантаження.

Як вже зазначалось, будь-який коефіцієнт матриці жорсткості скінченно-елементної моделі K_{ij} , являє собою вузлову реакцію R_i , що зумовлена вузловим переміщенням $\Delta_j=1$. На цій підставі для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості необхідно по чергово надавати одиничні переміщення вузлам скінченно-елементної моделі і знаходити сили, які передаватимуться водночас на вузли. Величини цих сил визначаються елементами відповідних матриць жорсткості окремих скінченних елементів.

15.5. Визначення дійсних зусиль

Із рівнянь рівноваги (15.4) визначається вектор вузлових переміщень

$$\vec{\Delta} = K^{-1}\vec{F}$$

і таким чином стають відомими переміщення всіх вузлів. Внаслідок нерозривності деформацій скінченно-елементної моделі кінці стержнів, що примикають до вузлів, які переміщуються, матимуть такі самі переміщення. Отже, для кожного стержня e скінченно-елементної моделі можна побудувати вектор кінцевих переміщень:

$$\vec{\delta}_e = \begin{Bmatrix} \vec{\delta}_i \\ \vec{\delta}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_{xi} \\ \Delta_{ji} \\ \Delta_{\phi i} \\ \Delta_{xj} \\ \Delta_{yj} \\ \Delta_{\phi j} \end{Bmatrix}.$$

Сумарні кінцеві реакції стержня (рис. 15.4, а) складаються з кінцевих реакцій r'_i , які зумовлені переміщеннями вузлів скінченно-елементної моделі і кінцевими силами p'_i , що спричинені дією розподіленого на стержні зовнішнього навантаження:

$$\vec{s}'_e = \vec{r}'_e + \vec{p}'_e, \quad (15.5)$$

де \vec{s}'_e – вектор сумарних кінцевих реакцій елемента e :

$$\vec{s}'^T = \{\vec{s}'_i \quad \vec{s}'_j\} = \{s'_1 \quad s'_2 \quad s'_3 \mid s'_4 \quad s'_5 \quad s'_6\}.$$

Дія сумарних кінцевих реакцій зумовлює внутрішні зусилля на кінцях стержня (рис. 15.4, б). Очевидно, що

$$\begin{aligned} s'_1 &= -N_i, & s'_4 &= N_j, \\ s'_2 &= Q_i, & s'_5 &= -Q_j, \\ s'_3 &= M_i, & s'_6 &= -M_j. \end{aligned}$$

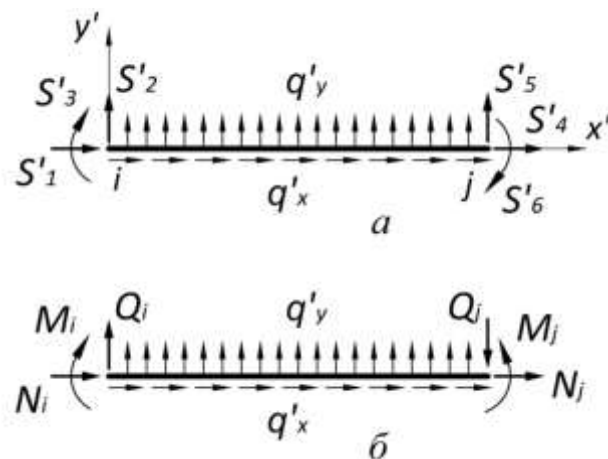


Рис. 15.4

Отже, вектор сумарних кінцевих реакцій пов'язаний з внутрішніми зусиллями:

$$\vec{s}^T = \left\{ -N_i \quad Q_i \quad M_i \mid N_j \quad -Q_j \quad -M_j \right\}_e.$$

З іншого боку, вектор кінцевих реакцій виражається через вектор кінцевих переміщень

$$\vec{r}'_e = k'_e \vec{\delta}'_e = k'_e T_e \vec{\delta}_e.$$

Тоді з рівняння (15.5) маємо

$$\vec{s}'_e = k'_e T_e \vec{\delta}_e + \vec{p}'_e.$$

Позначивши

$$h_e = k'_e T_e, \quad (15.6)$$

насамкінець можемо записати:

$$\vec{s}'_e = h_e \vec{\delta}_e + \vec{p}'_e.$$

Вигляд матриці h_e залежить від граничних умов на кінцях стержня. Так для стержня, що має на обох кінцях жорсткі вузли, після перемноження матриць згідно з (15.6)

$$h_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} fC & fS & 0 & -fC & -fS & 0 \\ -\frac{12i}{l^2}S & \frac{12i}{l^2}C & -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2}S & -\frac{12i}{l^2}C & -\frac{6i}{l} \\ -\frac{6i}{l}S & -\frac{6i}{l}C & 4i & -\frac{6i}{l}S & -\frac{6i}{l}C & 2i \\ \hline -fC & -fS & 0 & fC & fS & 0 \\ \frac{12i}{l^2}S & -\frac{12i}{l^2}C & \frac{6i}{l} & -\frac{12i}{l^2}S & \frac{12i}{l^2}C & \frac{6i}{l} \\ \frac{6i}{l}S & -\frac{6i}{l}C & 2i & -\frac{6i}{l}S & \frac{6i}{l}C & 4i \end{array} \right]_e,$$

де $S = \sin \beta$, $C = \cos \beta$.

Контрольні запитання

1. В чому полягає основна ідея методу скінченних елементів?
2. Чим характеризується напружено-деформований стан скінченно-елементної моделі конструкції?
3. Що таке дискретизація?
4. Яка схема споруди називається скінченно-елементною моделлю?
5. Для чого вводиться глобальна система координат?
6. Що називається локальною системою координат і для чого вона використовується?
7. Назвіть типи скінченних елементів, які використовуються у плоскій дискретній моделі?
8. Які Ви знаєте вузлові характеристики дискретної моделі?
9. Що є кінематичними, а що статичними характеристиками?
10. Які Ви знаєте кінцеві характеристики стержневих скінченних елементів?
11. Який вигляд має матриця перетворення і для чого вона використовується?
12. Який вигляд має матриця жорсткості скінченного елемента у локальній системі координат? Що являє собою будь-який коефіцієнт цієї матриці?
13. Який вигляд має матриця жорсткості скінченного елемента у глобальній системі координат? Що являє собою будь-який коефіцієнт цієї матриці?
14. Який вигляд має матриця жорсткості дискретної моделі? Що являє собою будь-який коефіцієнт цієї матриці?
15. Як здійснюється визначення дійсних зусиль в елементах скінченно-елементної моделі?

Список літератури

1. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології моделювання: підручник / А. В. Перельмутер, О. В. Шишов. – К. : ПАТ «ВІПОЛ», 2013. – 896 с.
2. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Комп'ютерний курс: підручник / В. А. Баженов, С. Я. Гранат, О. В. Шишов. – К. : ВІПОЛ, 1999. – 584 с.
3. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування: навчальний посібник/ В. А. Баженов, Г. М. Іванченко, О. В. Шишов та ін. – К. : Каравела, 2010.
4. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування: навчальний посібник / В. А. Баженов, Г. М. Іванченко, О. В. Шишов. – К. : Каравела, 2006.

Навчальне видання

ЛІЗУНОВ Петро Петрович
НЕДІН Валентин Олегович

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій

Підписано до друку 10.02. 2023. Формат 60 × 84_{1/16}.

Ум. друк. арк.. 10,0. Обл.-вид. арк. 10,75.

Електронний документ. Вид. № 22/І-22

Видавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.